ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
И
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

М. Б. НЕВЕЛЬСОН, Р. З. ХАСЬМИНСКИЙ

СТОХАСТИЧЕСКАЯ АППРОКСИМАЦИЯ И РЕКУРРЕНТНОЕ ОЦЕНИВАНИЕ

М. Б. НЕВЕЛЬСОН, Р. З. ХАСЬМИНСКИЙ

СТОХАСТИЧЕСКАЯ АППРОКСИМАЦИЯ И РЕКУРРЕНТНОЕ ОЦЕНИВАНИЕ

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

М. Б. НЕВЕЛЬСОН, Р. З. ХАСЬМИНСКИЙ

СТОХАСТИЧЕСКАЯ АППРОКСИМАЦИЯ И РЕКУРРЕНТНОЕ ОЦЕНИВАНИЕ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1972

517.8
Н 40
УДК 519.21

Стохастическая аппроксимация и рекуррентное оценивание
М. Б. Невельсон, Р. З. Хасьминский. Главная редакция физико-математической литературы изд-ва «Наука», 1972.

Книга посвящена последовательным методам решения класса задач, к которым относится, например, задача нахождения точки максимума функции, если каждое измеренное значение этой функции содержит случайную ошибку. Некоторые основные процедуры стохастической аппроксимации исследованы с единой точки зрения — с точки зрения теории марковских процессов и мартингалов. Рассмотрены примеры приложения доказанных теорем к некоторым задачам теории оценивания, теории обучения и теории управления, а также к некоторым задачам передачи информации при наличии обратной связи.

Книга рассчитана на студентов, аспирантов, инженеров и научных сотрудников, специализирующихся в области математической статистики, теории случайных процессов и их приложений.

Библ.— 78, илл.—8.

Михаил Борисович Невельсон, Рафаил Залманович Хасьминский

СТОХАСТИЧЕСКАЯ АППРОКСИМАЦИЯ И РЕКУРРЕНТНОЕ ОЦЕНИВАНИЕ

М., 1972., 304 стр. с илл.

Редактор *Б. Я. Левит*

Техн. редактор *С. Я. Шкляр* Корректор *М. Л. Медведская*

Сдано в набор 25/II 1972 г. Подписано к печати 28/VIII 1972 г. Бумага 84×108 1/32. Физ. печ. л. 9,5. Условн. печ. л. 15,96. Уч.-изд. л. 15,73. Тираж 10400 экз. Т-14730. Цена книги 1 р. 27 к. Заказ № 0315

Издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы
117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

Ордена Трудового Красного Знамени Московская типография № 7
«Искра революции» Главполиграфпрома Комитета по печати
при Совете Министров СССР. Москва, Трехпрудный пер., 9

2-2.3
64-72

ОГЛАВЛЕНИЕ

Памяти наших отцов,
погибших в сорок втором

ПРЕДИСЛОВИЕ

В этой книге изучаются некоторые специальные вопросы теории марковских случайных процессов, определяемых дифференциальными или разностными уравнениями. На ее направление большое влияние оказало то обстоятельство, что, как обнаружено в последние годы Я. З. Цыпкиным и некоторыми другими учеными, такие процессы описывают итеративные процедуры решения многочисленных задач теории обучающихся автоматических систем. В связи с этим основное внимание в книге уделено «вырожденным» с точки зрения общей теории марковских процессов ситуациям, когда траектории процессов сходятся к некоторым точкам фазового пространства. Таким свойством обладают, в частности, процедуры стохастической аппроксимации (с. а.), которые изучаются в главах 4—6.

Литература, посвященная этим процедурам, довольно обширна. Мы выбрали лишь несколько вопросов теории с. а., которые постарались изложить единым методом. Это вопросы сходимости (гл. 4), поведения процедуры при нескольких корнях уравнения регрессии (гл. 5), асимптотической нормальности (гл. 6). В гл. 7 рассматриваются лишь те модификации процедур с. а., которые связаны тематически с содержанием глав 8—10. Другие интересные модификации, предложенные в работах Дупача [2], Кестена [1], Фабиана [1] и других исследователей, остались за пределами книги.

Математический аппарат и результаты гл. 4 близки к аппарату и некоторым результатам гл. 4 книги Айзермана, Бравермана и Розоноэра [1] (в дальнейшем цитируемой как АБР [1]).

Мы не ставили перед собой задачу изложения приемов построения итеративных процедур, пригодных для решения тех или иных технических задач, так как, по нашему мнению, такие приемы весьма полно отражены в монографиях АБР [1], Цыпкина [1], [2]. Наоборот, в большей части изложения процедура считается заданной и исследуются ее свойства. По той же причине книга почти не содержит сколько-нибудь полного анализа примеров применения доказанных в ней теорем к конкретным задачам. Почти все примеры (см. § 2.8 или § 10.3 [1])) рассматриваются лишь с иллюстративной целью.

Только одно применение теорем глав 4—7 рассмотрено в главах 8 и 9 сравнительно подробно — это применение к задаче параметрического оценивания, одной из основных задач математической статистики [2]). Принятая здесь точка зрения близка к точке зрения Алберта и Гарднера в их книге [1]: рассматриваются лишь рекуррентные способы оценивания, при которых каждое следующее наблюдение вносит лишь незначительную поправку к имеющейся оценке, вычисляемую к тому же по простым формулам. Однако, в отличие от этой книги, основное внимание мы сосредоточиваем на построении асимптотически эффек-

---

[1]) Далее используется «десятичная» нумерация утверждений параграфов и формул. Так, запись § 2.7, теорема 3.7.1 означае, § 7 гл. 2, теорема 1 § 7 гл. 3. При ссылках на утверждения и формулы внутри главы используется двойная нумерация.

[2]) Как известно (см., например, АБР [1]), к оцениванию многомерного параметра распределений сводятся, в частности, такие задачи теории обучения, как восстановление неизвестной функции по наблюдениям, содержащим помехи, вероятностная задача обучения машины распознаванию образов.

тивных оценок, которые образуют марковские случайные процессы. Рассмотрена также (глава 10) и задача оценивания неизвестного параметра плотности при наличии дополнительного управляющего параметра, который может выбирать статистик.

Излагаемый в книге материал тесно связан с различными вопросами теории обучения, теории управления и теории передачи сообщений. Мы, однако, очень мало обсуждаем эти связи. Лишь связь задачи рекуррентного оценивания с задачей построения модулятора при наличии обратной связи рассматривается в § 9.4 сравнительно подробно. В частности, в этом параграфе некоторые недавние результаты Кайлата и Шалквийка [1], Зигангирова [1], Пинскера и Дьячкова [1] о передаче сообщений по гауссовскому белому каналу с бесшумной обратной связью излагаются с точки зрения рекуррентного оценивания.

На протяжении почти всей книги одни и те же вопросы рассматриваются параллельно для дискретного и для непрерывного времени. Материал, относящийся к непрерывному времени, может быть пропущен при первом чтении. Все же те читатели, которые сумеют преодолеть логические трудности, связанные с рассмотрением непрерывных во времени процессов, будут вознаграждены позже не только тем, что изучаемые проблемы имеют для непрерывных процессов самостоятельную значимость, но также и тем, что они лучше поймут идеи доказательств, относящихся к дискретному времени. (Иногда сначала излагается «непрерывный» вариант теоремы, чтобы пояснить смысл последующих более громоздких «дискретных» выкладок. Это особенно относится к гл. 6.)

К сожалению, для понимания книги недостаточно знания элементарного втузовского курса теории вероятностей, так как в ней активно используются понятия (такие как мартингал, марковский процесс), опирающиеся на предложенную А. Н. Колмогоровым [1] общую концепцию теории вероятностей на основе теории меры. В то же время нам хотелось, чтобы книгу могли читать и инженеры. С попыткой разрешить это противоречие связано содержание первых четырех параграфов книги. Читатель-математик может без ущерба начать чтение с последнего параграфа гл. 1. Остальным предоставляются две возможности: или, что лучше,— ознакомиться с упомянутой общей концепцией по соответствующим учебникам или, проверив разумность принятых определений и справедливость свойств условных математических ожиданий для элементарных случаев, принять их на веру в более общих ситуациях. Именно для лиц, избравших этот второй путь, и написаны §§ 1—4 гл. 1, представляющие собой не более чем удобную для дальнейших ссылок сводку некоторых определений и теорем упомянутой работы А. Н. Колмогорова.

Главы 5—6 написал Невельсон, 8—10 — Хасьминский. Остальные главы написаны нами вместе. Каждой главе предшествует краткая аннотация ее содержания. Большая часть ссылок содержится в примечаниях на стр. 294. Все ссылки относятся к списку литературы, помещенному в конце книги. В этот список включены лишь источники, использованные при подготовке книги. Более полная библиография содержится в книгах Васана [1], Цыпкина [1, 2], обзорных статьях Фабиана [3], Шметтерера [1] и других.

Мы хотели бы выразить сердечную благодарность А. Н. Ширяеву и Б. Я. Левиту, критика которых существенно помогла нам.

Р. З. Хасьминский
М. Б. Невельсон

Москва

ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим следующую задачу. Пусть $R(x)$ — некоторая функция и экспериментатор может производить ее измерения в любой точке x прямой. Пусть известно, например, что $R(x)$ монотонно возрастает и уравнение

$$R(x) = 0 \tag{0.1}$$

имеет решение. Как найти корень x_0 этого уравнения? Существуют очень быстро сходящиеся методы решения этой задачи (например, метод Ньютона, сходящийся быстрее геометрической прогрессии). Ситуация меняется, если измерения $R(x)$ наблюдатель может производить лишь с ошибкой, величиной которой нельзя пренебречь в силу требований, предъявляемых к точности решения уравнения (0.1). В такой ситуации уже невозможно, вообще говоря, построить процедуры, сходящиеся к x_0 быстрее, чем величина порядка $n^{-\frac{1}{2}}$, где n — число наблюдений.

Роббинс и Монро в 1951 г. предложили метод решения этой и более общей задачи, названный ими методом стохастической аппроксимации (с. а.). Пусть результат измерения в точке x_k в момент времени k есть

$$Y_k = R(x_k) + \xi_{k+1},$$

где $\xi_1, \ldots, \xi_n, \ldots$ — независимые случайные величины с нулевым математическим ожиданием. Процедура, предложенная Роббинсом и Монро (процедура РМ) состоит в следующем. При произвольной начальной точке $X(0) = x$ и произвольной последовательности положительных чисел a_k, удовлетворяющей условиям

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 < \infty, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} a_k = \infty, \tag{0.2}$$

положим

$$X_{k+1} = X_k - a_k Y_k, \quad Y_k = R(X_k) + \xi_{k+1}. \quad (0.3)$$

Смысл этой процедуры ясен. Если $X_k < x_0$, то разность $X_{k+1} - X_k$ будет в среднем положительна, так как ее условное математическое ожидание при данном X_k равно $-a_k R(X_k)$,

$$\mathsf{M}(X_{k+1} - X_k / X_k) = -a_k R(X_k).$$

В противоположном же случае эта разность в среднем отрицательна. Таким образом, процедура (0.3) «заставляет» последовательность X_k двигаться в сторону x_0. Однако нужно, во-первых, побеспокоиться о том, чтобы «скачки» $X_{k+1} - X_k$ затухали, так как иначе последовательность X_k не может сойтись к x_0 (она будет, вообще говоря, совершать вокруг точки x_0 скачки неубывающего размера). Этой цели служит первое из условий (0.2). Во-вторых, нужно, чтобы амплитуда скачков не убывала слишком быстро, так как иначе последовательность X_k может «не успеть» дойти до точки x_0. Такое свойство последовательности X_k обеспечивается вторым из условий (0.2). (Подробнее об этом см. § 4.1).

Роббинс и Монро доказали в [1] сходимость процедуры (0.3) при условиях (0.2) и некоторых ограничениях на функцию $R(x)$. Их работа вызвала много откликов. По-видимому, это связано прежде всего с практичностью процедуры (0.3). В самом деле, процедура (0.3) указывает простой план выполнения экспериментов, который не требует для своей реализации запоминания ни результатов предыдущих экспериментов Y_k, ни точек X_k, в которых эти эксперименты проводились (кроме последней). В то же время процедура дает последовательность X_k, сходящуюся к точке x_0 с вероятностью 1. Процедура (0.3) особенно удобна в тех случаях, когда статистик не знает заранее, в какой момент от него потребуют «выдать» оценку X_k для точки x_0 — он строит эту оценку в каждый момент времени, последовательно уточняя ее. Эти особенности процедур с. а. обусловили их популярность среди прикладников, особенно специалистов по автоматике и телемеханике и других областей кибернетики.

Метод с. а. создан для решения непараметрических задач математической статистики. Однако он может быть использован и для решения классических параметрических задач. Детальному исследованию этих возможностей посвящена интересная книга Алберта и Гарднера [1]. Пусть, например, $Z_k = x_0 + \xi_k$, $k = 1, \ldots, n$ — последовательность независимых наблюдений «сигнала» x_0 в «аддитивном шуме» ξ_k. Таким образом, ξ_k, $k = 1, \ldots, n$,— последовательность независимых случайных величин, имеющих плотность распределения $p(x)$.

Если «априорное» распределение $\pi(x)$ параметра x_0 задано, то, как известно, наилучшую в среднем квадратическом оценку x_n для x_0 дает условное математическое ожидание x_0 при условии $Z_1, \ldots, Z_n$, выражаемое формулой [1])

$$x_n = \mathsf{M}(x_0/Z_1, \ldots, Z_n) = \frac{\int u p(Z_1-u) \ldots p(Z_n-u)\, d\pi(u)}{\int p(Z_1-u) \ldots p(Z_n-u)\, d\pi(u)}. \tag{0.4}$$

Если же x_0 — не случайная величина, то обычно применяют оценку наибольшего правдоподобия, т. е. оценку $\hat{x}_n$, представляющую собой решение уравнения

$$\max_x [p(Z_1-x) \ldots p(Z_n-x)] = p(Z_1-\hat{x}_n) \ldots p(Z_n-\hat{x}_n), \tag{0.5}$$

или оценку (0.4) с достаточно произвольно выбранной функцией $\pi(x)$. Будем обозначать t_n оценки вида (0.5) или (0.4) с произвольной функцией $\pi(x)$. Ясно, что для всех этих оценок переход от x_n к x_{n+1} требует сложного пересчета с использованием всех предыдущих наблюдений. Можно, однако, попытаться построить оценку x_n для параметра x_0 в виде процедуры РМ. Для этого достаточно, например, рассмотреть процедуру оценивания

$$X_{k+1} = X_k - a_k(X_k - Z_{k+1}). \tag{0.6}$$

Понятно, что процедура (0.6) есть частный случай (0.3) при $R(x) = x - x_0$. Из теоремы Роббинса и Монро следует поэтому сходимость X_k к x_0 при $k \to \infty$. На проце-

---

[1]) Всюду в этой книге мы обозначаем оценки буквами x и X. Прописная буква X обычно применяется лишь для обозначения оценок, вычисляемых по рекуррентным формулам.

дуру (0.6) распространяются все практические преимущества процедуры РМ, о которых говорилось выше. Однако, может быть, оценки вида (0.4) или (0.5) имеют другие важные преимущества, например, в смысле их скорости сходимости к x_0 при $k \to \infty$?

Как и всюду в этой книге, качество оценок будем измерять средним значением квадрата разности $|x_k - x_0|$, т. е. функцией $\mathsf{M}\,|x_k - x_0|^2$. При таком критерии качества для оценок t_n известен следующий асимптотический результат (см. Ибрагимов, Хасьминский [1]). При некоторых довольно слабых ограничениях на $p(x)$ и $\pi(x)$, которые мы не будем здесь выписывать, справедливо асимптотическое равенство [1])

$$\mathsf{M}\,|t_n - x_0|^2 \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{nI}, \tag{0.7}$$

где I — информационное количество плотности $p(x)$, вычисляемое по формуле

$$I = \int \frac{|p'(x)|^2}{p(x)}\,dx.$$

Кроме того, хорошо известно, что нормированная разность $\sqrt{n}\,(t_n - x_0)$ асимптотически нормальна с параметрами $(0, I^{-1})$.

Для того чтобы сравнивать оценки метода РМ с оценками t_n, необходимы теоремы об асимптотическом поведении распределения $y_n = \sqrt{n}\,(X_n - x_0)$ и о пределе квадрата математического ожидания этой случайной величины. Такие теоремы были доказаны в ряде работ, среди которых мы упомянем работы Чжуна [1], Блума [2], Сакса [1], Фабиана [5]. Пусть $M\xi_i^2 = \sigma^2 < \infty$. Оказалось, что для процедуры (0.3) и более общей (см. гл. 6) при $a_n = [a(n+1)]^{-1}$ величина y_n асимптотически нормальна с параметрами $\left(0, \frac{\sigma^2}{a(2R'(x_0) - a)}\right)$, если $0 < a < 2R'(x_0)$. Вопрос об оптимальном выборе параметра a рассматривался в большом числе работ, начиная с известной статьи Чжуна [1].

В рассмотренном выше примере $R(x) = x - x_0$. Ясно, что $R'(x_0) = 1$ и для получения оценки с асимптотически

---

[1]) Как обычно, $a \sim b$ означает, что $\lim a/b = 1$.

оптимальными свойствами в классе оценок вида (0.6) с $a_n = [a(n+1)]^{-1}$ следует положить $a = 1$. Нетрудно видеть, что полученная при этом оценка совпадает с оценкой среднего арифметического

$$\bar{x}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} Z_i.$$

Известно, что оценка $\bar{x}_n$ оптимальна в среднем квадратическом смысле лишь для нормального закона распределения (ее дисперсия равна σ^2/n, а в случае любого закона, отличного от нормального, $\sigma^2 > I^{-1}$).

Еще хуже обстоит дело, когда $R(x)$ нелинейна. В этом случае следовало бы выбрать $a = R'(x_0)$. Но ведь функция $R(x)$ неизвестна наблюдателю и мы можем использовать лишь оценки для $R'(x_0)$, полученные на основании наблюдений. Такой «адаптивный» метод нахождения оптимального множителя (в классе множителей вида $[a(n+1)]^{-1}$) был предложен Вентером [1] (подробнее эти результаты Вентера и некоторые их обобщения изложены в гл. 7).

Однако, как уже было сказано, даже если мы научимся выбирать множитель a оптимальным образом, дисперсия оценки, вообще говоря, будет в конечное число раз больше дисперсии оценок t_n. Это и неудивительно. Ведь при вычислении оценок вида (0.6) мы не пользуемся никакими свойствами распределения ξ_i, в то время как оценки (0.4), (0.5) существенно зависят от явного вида плотности. Возникает естественный вопрос — нельзя ли построить рекуррентные процедуры типа стохастической аппроксимации, использующие явный вид плотности $p(x)$ и дающие оценки, удовлетворяющие соотношению (0.7)?

Чтобы прийти к такого рода оценкам, воспользуемся следующим эвристическим приемом (см. Стратонович [2]). Пусть $\hat{x}_n$ — оценка наибольшего правдоподобия. Тогда в точке $\hat{x}_n$ производная логарифма функции правдоподобия обращается в нуль. Таким образом,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{p'(Z_k - \hat{x}_n)}{p(Z_k - \hat{x}_n)} = 0; \qquad \sum_{k=1}^{n+1} \frac{p'(Z_k - \hat{x}_{n+1})}{p(Z_k - \hat{x}_{n+1})} = 0. \qquad (0.8)$$

Считая разность $\hat{x}_{n+1}-\hat{x}_n$ малой и вычитая первое уравнение в (0.8) из второго, получим

$$\frac{p'}{p}(Z_{n+1}-\hat{x}_n)+\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{p'}{p}(Z_k-\hat{x}_n)\right)'(\hat{x}_{n+1}-\hat{x}_n)\approx 0.$$

Таким образом, мы приходим к процедуре оценивания

$$X_{n+1}=X_n-\frac{\frac{p'}{p}(Z_{n+1}-X_n)}{\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{p'}{p}(Z_k-X_n)\right)'}. \tag{0.9}$$

Процедуры типа (0.9) в более общей ситуации рассматривались в работах Стратоновича [2], Цыпкина [1, 2] и других. Цыпкиным [2] алгоритм типа (0.9) назван квазиоптимальным. Недостатком этого алгоритма является необходимость хранения в памяти машины всех наблюдений $Z_1, \ldots, Z_n$. Кроме того, алгоритм (0.9) не так легко исследовать, поскольку процесс X_n, определяемый этим алгоритмом, не является, вообще говоря, марковским.

Предположим теперь, что величина X_n сходится к оцениваемому параметру x_0, когда $n\to\infty$, и заменим в знаменателе (0.9) X_n на x_0. Тогда $\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{p'}{p}(Z_k-x_0)\right)'$ — сумма независимых одинаково распределенных случайных величин, причем

$$\mathsf{M}\left(\frac{p'}{p}(Z_k-x_0)\right)'=$$
$$=\mathsf{M}\frac{p''}{p}(Z_k-x_0)-\mathsf{M}\left(\frac{p'}{p}(Z_k-x_0)\right)^2=-I.$$

Поэтому, в силу закона больших чисел,

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{p'}{p}(Z_k-x_0)\right)'=-nI+o(n)\quad n\to\infty.$$

Подставляя это значение в (0.9), мы приходим к предложенному Д. Сакрисоном[1]) [2], [3] алгоритму

[1]) Точнее, Сакрисон предложил рекуррентную оценку в более общей ситуации. Изложение его результатов в расширенном виде дано в гл. 8.

оценивания

$$X_{n+1} = X_n + \frac{1}{In} \frac{p'(Z_{n+1} - X_n)}{p(Z_{n+1} - X_n)}. \qquad (0.10)$$

При некоторых ограничениях на $p(x)$ Сакрисон доказал состоятельность и асимптотическую эффективность в сильном смысле (см. определения в гл. 8) оценки (0.10). Таким образом, оценка (0.10), сохраняя все преимущества рекуррентных оценок, позволяет добиваться к тому же асимптотически оптимальных результатов.

Изложенные соображения, относящиеся к частному случаю аддитивного шума, позволяют заключить, что рекуррентные процедуры параметрического оценивания заслуживают большого внимания.

Интересно, в частности, рассмотреть ситуацию, в которой экспериментатор должен оптимальным образом оценить параметр x_0 в случае, когда в его распоряжении находится управляющий параметр [1]) z. Точное решение этой задачи очень громоздко. Для получения оптимального плана наблюдений (т. е. оптимального выбора последовательности z_n управлений и оценки x_n) нужно, грубо говоря, «проиграть» всю задачу: сначала при заданных $z_1, \ldots, z_n$ найти оптимальное значение оценки $x_n(z_1, \ldots, z_n)$, равное условному математическому ожиданию $\mathsf{M}_{z_1 \ldots z_n}(x_0/Y_1 = y_1, \ldots, Y_n = y_n)$ при заданных наблюдениях $y_1, \ldots, y_n$, произведенных в точках $z_1, \ldots, z_n$ соответственно. После этого нужно найти минимальное значение выражения

$$\mathsf{M}_{z_1, \ldots, z_n} \{(x_n(z_1, \ldots, z_n) - x_0)^2 / Y_1 = y_1, \ldots, Y_{n-1} = y_{n-1}\},$$

рассматриваемого как функция z_n. Таким образом, мы получим n-е оптимальное управление как функцию от $z_1, \ldots, z_{n-1}, y_1, \ldots, y_{n-1}$. Действуя так и далее, можно в конце концов получить z_1. Однако статистик может оказаться в ситуации, когда у него нет времени или аппаратуры для проведения этих сложных выкладок. Тогда можно пойти по другому пути: выбрав сначала произвольное значение управляющего параметра и произвольное значение оценки, построить рекуррентную процедуру для

[1]) Более точная постановка задачи дана в гл. 10,

нахождения пары x_n, z_n, $n=1, 2, 3, \ldots$ Такой метод будет тем более оправдан, если удастся доказать, что асимптотически качество получаемой оценки не хуже качества оптимальной байесовской оценки, способ построения которой намечен выше. В некоторых случаях это действительно удается доказать (см. гл. 10).

Мы не упоминаем здесь об обширной литературе, посвященной применениям методов с. а., а также об интересных модификациях процедуры РМ. Отметим лишь весьма важную процедуру с. а. для отыскания максимума функции, значения которой измеряются со случайной ошибкой, предложенную Кифером и Вольфовицем [1] (см. гл. 4).

В заключение укажем три задачи, связанные с рассмотренным в книге кругом вопросов.

1. В гл. 8 доказано, что при некоторых ограничениях (см. теорему 8.4.1.) аналогичная (0.10) процедура (8.4.5) дает состоятельную, асимптотически нормальную и асимптотически эффективную рекуррентную оценку параметра x_0. Было бы интересно расширить условия теоремы 8.4.1, приблизив их к условиям, при которых доказана асимптотическая эффективность оценок t_n (см., например, Ибрагимов и Хасьминский [1]).

2. В гл. 8 на основании результатов гл. 6 доказано, что рекуррентные оценки X_n параметра x_0 в широком классе случаев не только асимптотически нормальны, но что для них справедлив и следующий более тонкий результат. Пусть $n < n_1 < \ldots < n_k$ — целые числа. Обозначим $s_i = \ln \frac{n_i}{n}$. Тогда распределение вектора $\sqrt{n}(X_n - x_0)$, $\sqrt{n_1}\,(X_{n_1} - x_0), \ldots, \sqrt{n_k}\,(X_{n_k} - x_0)$ сближается при $n \to \infty$ с распределением вектора $X(0), X(s_1), \ldots \ldots, X(s_k)$, где $X(t)$ — стационарный гауссовский марковский процесс, корреляционная функция которого выписана в § 6.5. Есть все основания ожидать, что этот результат справедлив и для оценок t_n. В самом деле, приведенные выше наводящие соображения дают основания надеяться, что оценка максимального правдоподобия x_n близка к оценке (0.10) при больших n. В сочетании с теоремой 8.4.1 это делает правдоподобным следующее утверждение: при некоторых предположениях о $p(x)$

распределение вектора $\sqrt{n}\,(\hat{x}_n - x_0),\ \sqrt{n_1}\,(\hat{x}_{n_1} - x_0),\ \ldots$ $\ldots,\ \sqrt{n_k}\,(\hat{x}_{n_k} - x_0)$ сближается с распределением вектора $X(0),\ X(s_1),\ \ldots,\ X(s_k)$ при $n \to \infty$, $\ln \frac{n_i}{n} \to s_i$, где $X(t)$ — стационарный марковский процесс, удовлетворяющий уравнению $dX(t) = -\frac{1}{2} X\,dt + I^{-\frac{1}{2}}\,d\xi(t)$, $\xi(t)$ — стандартный винеровский процесс [1]). Аналогичная гипотеза. видимо, может быть обоснована и в более общей ситуации. Однако пока в литературе нет никаких результатов о совместных предельных распределениях оценок класса t_n.

3. По-видимому, многие результаты, изложенные в этой книге, справедливы с соответствующими модификациями и в том случае, когда наблюдения не независимы, а сами образуют марковский процесс с достаточно хорошими свойствами перемешивания. Было бы интересно доказать в этой ситуации результаты, аналогичные результатам глав 6—9 [2]). В частности, было бы интересно выяснить условия состоятельности и асимптотической эффективности процедуры (9.5.3), (9.5.4), введенной в § 9.5.

---

[1]) Замечание при корректуре. В настоящее время эту гипотезу удалось доказать для оценок t_n. См. И. А. Ибрагимов и Р. З. Хасьминский, ДАН СССР, в печати.

[2]) Для случая линейной параметризации состоятельность некоторых оценок с. а. доказана в интересной работе Холево [1].

ГЛАВА 1

ВЕРОЯТНОСТНЫЕ ОСНОВЫ И МАРТИНГАЛЫ

В §§ 1—4 определяются некоторые понятия теории меры. Приводятся, как правило, без доказательств основные свойства вероятностей, случайных величин, условных математических ожиданий и условных вероятностей. В § 5 изучается важный для дальнейшего класс случайных процессов — мартингалы и супермартингалы. Доказана теорема Дуба о пределе супермартингала.

§ 1. Вероятность

Начнем с рассмотрения двух опытов, исходы которых естественно считать случайными. Первый из них — бросание игральной кости. Возможные исходы этого опыта — события ω_i, состоящие в выпадении i очков ($i = 1, 2, \ldots, 6$). Любое другое событие, связанное с этим экспериментом, есть объединение (сумма) некоторых из ω_i. Для симметричной кости можно считать ω_i равновероятными, т. е. $\mathsf{P}\{\omega_i\} = 1/6$. Для любого другого события

$$\mathsf{P}\{A\} = \sum_{\omega_i \in A} \mathsf{P}\{\omega_i\}. \tag{1.1}$$

Приведенные рассуждения естественно обобщаются следующим образом. Рассмотрим пространство $\Omega = \{\omega_i\}$, состоящее из счетного числа элементов — элементарных событий. Пусть для каждого ω_i определена неотрицательная функция $\mathsf{P}\{\omega_i\}$ такая, что $\sum_{\omega_i \in \Omega} \mathsf{P}\{\omega_i\} = 1$. Тогда формула (1.1) определяет вероятность любого события A, представляющего сумму конечного или счетного числа событий ω_i. Таким образом, получаем дискретное пространство элементарных событий с введенной на нем вероятностной мерой.

Следующий пример показывает, что этого понятия недостаточно. Пусть D — некоторая область на плоскости (с площадью $\operatorname{mes} D$), в которую наугад бросается точка. Под случайным событием здесь естественно понимать попадание точки в ту или иную подобласть области D. Для того чтобы этому событию приписать вероятность, придадим смысл выражению «точка бросается наугад» следующим образом: вероятность попадания точки в область D_1 из D пропорциональна площади области D_1, т. е. $\mathsf{P}\{D_1\} = \operatorname{mes} D_1/\operatorname{mes} D$. Однако здесь мы сталкиваемся с определенной трудностью, так как не любому подмножеству области D можно естественным образом приписать площадь. Поэтому необходимо сузить класс рассматриваемых подмножеств $D_1 \subset D$, если мы хотим считать, что каждое случайное событие имеет некоторую вероятность.

Изложенные соображения наводят на мысль определить в общем случае пространство элементарных событий как совокупность элементов любой природы, а под случайными событиями понимать некоторые подмножества этой совокупности.

Более точно, пусть Ω — некоторое абстрактное множество. Назовем его *множеством* (*пространством*) *элементарных событий*. Рассмотрим систему $\mathfrak{A}$ подмножеств множества Ω. Относительно структуры этой системы сделаем следующие предположения:

1) Наряду с каждым множеством A система $\mathfrak{A}$ содержит и его дополнение $\bar{A}$.

2) Если $A_1, A_2, \ldots$ — произвольная счетная последовательность множеств из $\mathfrak{A}$, то их сумма $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$ и пересечение $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i$ также принадлежат $\mathfrak{A}$.

Система множеств $\mathfrak{A}$, удовлетворяющая этим требованиям, называется *σ-алгеброй подмножеств* множества Ω, а пара $(\mathfrak{A}, \Omega)$ — *измеримым пространством*.

Будем говорить, что σ-алгебра $\mathfrak{A}_1$ *вложена* в σ-алгебру $\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{A}_1 \subset \mathfrak{A}_2$, если любое событие из $\mathfrak{A}_1$ принадлежит и $\mathfrak{A}_2$.

Пересечением двух σ-алгебр $\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{A}_2$ называется совокупность $\mathfrak{A}$ множеств, принадлежащих как $\mathfrak{A}_1$, так и $\mathfrak{A}_2$.

Минимальной σ-алгеброй, содержащей систему множеств S, называется σ-алгебра, образованная пересечением всех σ-алгебр, содержащих S. Она очевидно, всегда существует и единственна.

Предположим, в частности, что $\Omega = E_l$ — l-мерное евклидово пространство точек $x = (x_1, x_2, \ldots, x_l)$. Рассмотрим в E_l систему «интервалов» S_0, определяемых равенствами $a_i \leqslant x_i < b_i$, $i = 1, 2, \ldots, l$, где a_i, b_i — произвольные числа. Минимальная σ-алгебра $\mathfrak{B}_l$, содержащая систему S_0, называется *борелевской* σ-алгеброй. Эта σ-алгебра часто будет использоваться ниже. Множества $A \in \mathfrak{B}_l$ называются *борелевскими*.

Мерой μ на σ-алгебре $\mathfrak{A}$ пространства Ω называется функция, ставящая в соответствие каждому множеству A из $\mathfrak{A}$ неотрицательное число или $+\infty$, так что

$$\mu\left\{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right\} = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

для любой последовательности непересекающихся множеств из $\mathfrak{A}$. Мера μ называется *конечной*, если $\mu(\Omega) < \infty$, и *σ-конечной*, если существует расширяющаяся последовательность множеств $\Gamma_n \subset \mathfrak{A}$ такая, что $\bigcup_n \Gamma_n = \Omega$, $\mu(\Gamma_n) < \infty$.

Мы будем рассматривать ниже лишь *полные* меры, т. е. меры на таких σ-алгебрах $\mathfrak{A}$, что любое множество A, вложенное в множество меры нуль, также принадлежит $\mathfrak{A}$.

Если мера μ на σ-алгебре $\mathfrak{A}$ не полна, то эту σ-алгебру можно пополнить до σ-алгебры $\mathfrak{A}'$, включив в нее все подмножества множеств нулевой меры. Согласно теореме о пополнении меры (Халмош [1]) на новой σ-алгебре $\mathfrak{A}'$ можно построить полную меру μ', совпадающую с μ на множествах из $\mathfrak{A}$. Пусть, в частности, m — мера на $\mathfrak{B}_l$ такая, что мера «интервала» $a_i \leqslant x_i < b_i$, $i = 1, \ldots, l$, равна $(b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \ldots (b_l - a_l)$. Ее пополнение называется *лебеговой* мерой в E_l.

Мера μ называется *вероятностной*, если $\mu(\Omega) = 1$. Такую меру будем обычно обозначать через P.

Ниже без специального упоминания используются следующие свойства меры. Доказательства этих свойств можно найти в любом учебнике по теории вероятностей или теории меры.

а) Если $A_1 \in \mathfrak{A}$, $A_2 \in \mathfrak{A}$, $A_1 \subset A_2$, то $\mu\{A_1\} \leqslant \mu\{A_2\}$.

б) Для любой конечной или счетной последовательности множеств A_n из $\mathfrak{A}$ справедливо неравенство

$$\mu\{\bigcup_n A_n\} \leqslant \sum_n \mu\{A_n\}.$$

в) Если $A_n \in \mathfrak{A}$ и $A_1 \subset A_2 \subset \ldots \subset A_n \subset \ldots$, то

$$\mu\{\bigcup_n A_n\} = \lim_{n\to\infty} \mu\{A_n\}.$$

г) Если $A_n \in \mathfrak{A}$, $A_1 \supset A_2 \supset \ldots \supset A_n \supset \ldots$, $\mu(A_n) < < \infty$, то

$$\mu\{\bigcap_n A_n\} = \lim_{n\to\infty} \mu\{A_n\}.$$

Тройка $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathsf{P})$, состоящая из множества элементарных событий Ω, σ-алгебры его подмножеств $\mathfrak{A}$ и вероятностной меры P на $\mathfrak{A}$ называется *вероятностным* пространством.

§ 2. Случайные величины

Пусть $\mathfrak{A}$ —некоторая σ-алгебра событий из $\Omega = \{\omega\}$. Определенная на Ω функция $\xi = \xi(\omega)$ со значениями из $E_1 \cup \{\infty\} \cup \{-\infty\}$ называется $\mathfrak{A}$-*измеримой*, если при любом c множество $\{\omega : \xi(\omega) < c\}$ принадлежит $\mathfrak{A}$. (Ясно, что в случае дискретного пространства любая функция измерима.)

Функция, измеримая относительно σ-алгебры $\mathfrak{B}_l$, называется *борелевской* (или *измеримой по Борелю*).

Для дальнейшего важно, что свойство измеримости функций сохраняется при алгебраических операциях, предельном переходе, подстановке измеримой функции в борелевскую.

Если на σ-алгебре $\mathfrak{A}$ задана вероятностная мера, так что $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathsf{P})$ — вероятностное пространство, то $\mathfrak{A}$-измеримая функция будет называться *случайной величиной*. (Это определение согласуется с интуитивным пониманием случайной величины как величины, принимающей различные значения в зависимости от исхода опыта. Например, случайная величина, равная числу выпавших очков в первом примере § 1, задается равенством $\xi(\omega_i) = i$, $i = = 1, 2, \ldots, 6$.) Подчеркнем, что случайные величины, принимающие значения $\pm\infty$, не исключаются.

Наряду со скалярной случайной величиной рассмотрим *векторную* случайную величину, принимающую значения из l-мерного евклидова пространства E_l, понимая под ней вектор [1]), каждая компонента которого — скалярная случайная величина. Можно доказать, что для любого случайного вектора ξ со значениями в E_l множество $\{\omega: \xi(\omega) \in B\}$ измеримо для любого борелевского множества B. Вероятность $\mathsf{P}\{\xi \in B\}$ называется *распределением* вектора ξ. В частности, если B — множество $\{y = (y_1, \ldots, y_l): y_1 < x_1, \ldots, y_l < x_l\}$, то $\mathsf{P}\{\xi \in B\} = \mathsf{P}\{\xi_1 < x_1, \quad \xi_2 < x_2, \ldots, \xi_l < x_l\} = F_\xi(x), \quad x = (x_1, \ldots, x_l)$ — многомерная *функция распределения* вектора $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_l)$.

Две случайные величины $\xi(\omega)$ и $\eta(\omega)$ называются *стохастически эквивалентными*, если они отличаются лишь на множестве вероятности нуль.

Пусть $\xi = \xi(\omega)$ — неотрицательная $\mathfrak{A}$-измеримая функция, определенная на измеримом пространстве $(\Omega, \mathfrak{A})$ с мерой μ. Тогда множество $B_{k\lambda} = \{k\lambda \leqslant \xi < (k+1)\lambda\} \cap A$, $A \in \mathfrak{A}$, при любом $\lambda > 0$ $\mathfrak{A}$-измеримо. Рассмотрим сумму

$$I_\lambda = \begin{cases} \sum\limits_{k=0}^{\infty} k\lambda\mu\{B_{k\lambda}\}, & \text{если } \mu\{\{\xi = \infty\} \cap A\} = 0 \\ \infty, & \text{если } \mu\{\{\xi = \infty\} \cap A\} > 0 \end{cases}$$

Ее предел при $\lambda \to 0$ всегда существует (но, быть может, равен ∞). Этот предел называется *интегралом Лебега* функции ξ по множеству A и обозначается

$$\int\limits_A \xi\mu\{d\omega\}.$$

В общем случае, когда ξ принимает значения разных знаков, интеграл Лебега не всегда можно определить разумным образом. Например, не ясно, какое значение интеграла приписать функции ξ, принимающей значения $+\infty$ и $-\infty$ на множествах положительной меры. Тем не менее, в некоторых случаях удобно рассматривать интегралы от функций со значениями $\pm\infty$.

---

[1]) Всюду в этой книге векторы понимаются как векторы — столбцы в E_l, если не оговорено противное.

Положим

$$\xi^+ = \max(\xi, 0), \qquad \xi^- = \max(-\xi, 0).$$

Очевидно, ξ^+ и ξ^- неотрицательны, причем

$$\xi = \xi^+ - \xi^-.$$

Если хотя бы одна из функций ξ^+ или ξ^- имеет конечный интеграл Лебега по множеству A, то будем говорить, что интеграл

$$\int_A \xi\mu\{d\omega\}$$

существует, и положим

$$\int_A \xi\mu\{d\omega\} = \int_A \xi^+\mu\{d\omega\} - \int_A \xi^-\mu\{d\omega\}.$$

Интеграл Лебега, как известно, равен определенному интегралу Римана, если, например, множество $A \subset E_1$ — интервал, мера μ — лебегова, а функция ξ интегрируема по Риману и ограничена. Он обладает многими обычными свойствами определенного интеграла. Например, если все написанные ниже интегралы существуют, то справедливы соотношения

$$\int_A \xi\mu\{d\omega\} \geqslant 0, \quad \text{если} \quad \xi \geqslant 0 \quad \text{для} \quad \omega \in A,$$

$$\int_A (a\xi + b\eta)\,\mu\{d\omega\} = a\int_A \xi\mu\{d\omega\} + b\int_A \eta\mu\{d\omega\},$$

$$\left|\int_A \xi\mu\{d\omega\}\right| \leqslant \int_A |\xi|\,\mu\{d\omega\},$$

часто используемые в дальнейшем. Отметим еще одно важное свойство интеграла — *неравенство Чебышева*: если $\xi(\omega) \geqslant 0$, то

$$\mu\{\omega\colon \xi(\omega) \geqslant c,\ \omega \in A\} \leqslant \frac{1}{c}\int_A \xi(\omega)\,\mu\{d\omega\}, \qquad A \in \mathfrak{A}.$$

Некоторые другие важные свойства интеграла будут указаны ниже для частного случая, когда μ — вероятностная мера.

Пусть $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathsf{P})$ — вероятностное пространство, $\xi = \xi(\omega)$ — случайная величина. Если интеграл

$$\int_{\Omega} \xi(\omega) \mathsf{P}\{d\omega\} = \int \xi \mathsf{P}\{d\omega\}$$

существует, то он называется *математическим ожиданием* случайной величины ξ и обозначается $\mathsf{M}\xi$. Может, конечно, случиться, что $\mathsf{M}\xi = \infty$ или $\mathsf{M}\xi = -\infty$. Если же $\mathsf{M}\,|\,\xi\,| < \infty$, то говорят, что случайная величина ξ имеет *конечное математическое ожидание*.

В случае, когда ξ дискретна, т. е. принимает конечное или счетное число значений $x_1, x_2, \ldots$ с вероятностями $p_1, p_2, \ldots$, то из определения интеграла Лебега легко вытекает (при условии существования $\mathsf{M}\xi$) формула

$$\mathsf{M}\xi = \sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k. \tag{2.1}$$

В общем же случае определение математического ожидания как интеграла Лебега сводится к замене ξ на близкую к ней дискретную случайную величину, вычислению математического ожидания по формуле (2.1) и последующему предельному переходу. Отсюда вытекает формула

$$\mathsf{M}\xi = \int x\, dF_{\xi}(x),$$

где $F_{\xi}(x) = \mathsf{P}\{\xi < x\}$ — функция распределения случайной величины ξ. Можно также показать, что для любой борелевской функции $f(x)$

$$\mathsf{M}f(\xi) = \int f(x)\, dF_{\xi}(x), \tag{2.2}$$

если $\mathsf{M}f(\xi)$ существует. Аналогичная формула справедлива и для векторных случайных величин.

Далее нам часто придется иметь дело с последовательностями ξ_n случайных величин (векторов), сходящихся к ξ в том или ином вероятностном смысле.

Последовательность ξ_n сходится к ξ: а) *почти наверное* (п. н.), если $\mathsf{P}\{\xi_n \to \xi\} = 1$; б) *по вероятности*, если $\mathsf{P}\{|\,\xi_n - \xi\,| > \varepsilon\} \to 0$ для любого $\varepsilon > 0$; в) *по распределению*, если последовательность функций распределения $F_{\xi_n}(x)$ слабо сходится к $F_{\xi}(x)$, т. е. если для любой непрерывной ограниченной функции $f(x)$ при $n \to \infty$

$$\mathsf{M} f(\xi_n) = \int f(x)\, dF_{\xi_n}(x) \to \int f(x)\, dF_{\xi}(x) = \mathsf{M} f(\xi).$$

Пусть ξ_n — последовательность случайных величин с конечным математическим ожиданием, сходящихся в некотором смысле к случайной величине ξ. При каких дополнительных условиях справедливо равенство

$$\mathsf{M}\xi = \lim_{n\to\infty} \mathsf{M}\xi_n?$$

Общие теоремы о возможности такого предельного перехода доказаны Лебегом и изложены во всех курсах теории меры.

Сформулируем для удобства дальнейших ссылок следующие известные утверждения.

Лемма Фату. *Если случайные величины ξ_n неотрицательны, то*

$$\mathsf{M} \varliminf_{n\to\infty} \xi_n \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \mathsf{M}\xi_n.$$

Теорема Лебега. *Если с вероятностью* 1

$$\xi_n \to \xi, \qquad |\xi_n| < \eta,$$

где η — некоторая случайная величина с конечным математическим ожиданием, то

$$\mathsf{M}\xi = \lim_{n\to\infty} \mathsf{M}\xi_n.$$

Лемма 2.1. *Если $\xi_n \to \xi$ по вероятности, причем для некоторого $\alpha > 1$ последовательность $\mathsf{M}\,|\xi_n|^\alpha$ ограничена, то ξ имеет конечное математическое ожидание и*

$$\mathsf{M}\xi = \lim_{n\to\infty} \mathsf{M}\xi_n.$$

Это утверждение остается в силе и в случае сходимости ξ_n к ξ по распределению, а также в том случае, когда ξ_n, ξ — случайные векторы из E_l.

Пусть на σ-алгебре $\mathfrak{A}$ наряду с вероятностной мерой P задана также некоторая другая мера μ (не обязательно вероятностная). Будем говорить, что мера μ *абсолютно непрерывна относительно меры* P, если $\mu(A) = 0$ всякий раз, когда $\mathsf{P}\{A\} = 0$.

Когда мера μ может быть представлена в виде интеграла по вероятностной мере P, т. е. когда найдется такая случайная величина $\xi(\omega)$, что

$$\mu(A)=\int_A \xi(\omega)\,\mathsf{P}\{d\omega\}$$

для любого множества $A\in\mathfrak{A}$? Очевидно, для этого необходимо, чтобы мера μ была абсолютно непрерывна относительно меры P. Оказывается, что верно и обратное утверждение.

Теорема Радона — Никодима. *Пусть* $(\Omega,\mathfrak{A},\mathsf{P})$ — *вероятностное пространство и* μ — *некоторая мера на* σ-*алгебре* $\mathfrak{A}$, *абсолютно непрерывная относительно меры* P. *Тогда найдется единственная с точностью до стохастической эквивалентности случайная величина* $\xi(\omega)\geqslant 0$, *для которой*

$$\mu(A)=\int_A \xi(\omega)\,\mathsf{P}\{d\omega\},\qquad A\in\mathfrak{A}.$$

Если при этом мера μ *конечна, то случайная величина* $\xi(\omega)$ *принимает лишь конечные значения с вероятностью* 1.

§ 3. Условные вероятности и условные математические ожидания

Пусть $(\Omega,\mathfrak{A},\mathsf{P})$ — вероятностное пространство, а B — некоторое событие, причем $\mathsf{P}\{B\}\neq 0$. Тогда *условная вероятность* $\mathsf{P}\{A/B\}$, $A\in\mathfrak{A}$, определяется формулой

$$\mathsf{P}\{A/B\}=\frac{\mathsf{P}\{AB\}}{\mathsf{P}\{B\}}.$$

Очевидно при фиксированном B условная вероятность $\mathsf{P}\{\cdot/B\}$ является мерой на $\mathfrak{A}$. *Условным математическим ожиданием* $\mathsf{M}(\xi/B)$ неотрицательной случайной величины $\xi=\xi(\omega)$ называется интеграл

$$\mathsf{M}(\xi/B)=\int_\Omega \xi(\omega)\,\mathsf{P}\{d\omega/B\}.$$

Нетрудно проверить, что

$$\mathsf{M}(\xi/B)=\frac{1}{\mathsf{P}\{B\}}\int_B \xi(\omega)\,\mathsf{P}\{d\omega\}. \tag{3.1}$$

Наша дальнейшая цель — расширить понятия условной вероятности и условного математического ожидания, определив их не только относительно некоторого фиксированного события B ненулевой вероятности, но и относительно σ-алгебры событий. В частности, это позволит рассматривать и условные вероятности относительно некоторых событий вероятности нуль.

Для этого рассмотрим сначала минимальную σ-алгебру $\mathfrak{B}_0 \subset \mathfrak{A}$, содержащую счетную систему событий $B_1, B_2, \ldots$, в сумме составляющих Ω, причем $\mathsf{P}\{B_i\} \neq 0$ при любом i.

Условной вероятностью события A относительно $\mathfrak{B}_0$ назовем случайную величину $\mathsf{P}\{\omega, A/\mathfrak{B}_0\} = \mathsf{P}\{A/\mathfrak{B}_0\}$, принимающую на множестве B_i постоянное значение $\mathsf{P}\{A/B_i\}$, т. е. [1])

$$\mathsf{P}\{A/\mathfrak{B}_0\} = \sum_{i=1}^{\infty} \chi_{B_i}(\omega)\, \mathsf{P}\{A/B_i\}.$$

Очевидно, при любом ω функция множеств $\mathsf{P}\{\cdot/\mathfrak{B}_0\}$ является мерой на $\mathfrak{a}$. Поэтому естественно определить условное математическое ожидание $\mathsf{M}(\xi/\mathfrak{B}_0)$ равенством

$$\mathsf{M}(\xi/\mathfrak{B}_0) = \int_{\tilde{\omega}\in\Omega} \xi(\tilde{\omega})\, \mathsf{P}\{d\tilde{\omega}/\mathfrak{B}_0\}.$$

Из двух последних формул ясно, что

$$\mathsf{P}\{A/\mathfrak{B}_0\} = \mathsf{M}(\chi_A/\mathfrak{B}_0),$$

т. е. условная вероятность является частным случаем условного математического ожидания.

Оказывается, что и в общем случае удобно определить условную вероятность как частный случай условного математического ожидания. Для того чтобы прийти к такому определению, отметим следующие свойства случайной величины $\mathsf{M}(\xi/\mathfrak{B}_0)$.

Во-первых,

$$\int_B \mathsf{M}(\xi/\mathfrak{B}_0)\, \mathsf{P}\{d\omega\} = \int_B \xi(\omega)\, \mathsf{P}\{d\omega\}$$

для любого $B \in \mathfrak{B}_0$. Это равенство легко вытекает из определения $\mathsf{M}(\xi/\mathfrak{B}_0)$, если заметить, что любое множество B

[1]) Здесь и ниже через $\chi_A = \chi_A(\omega)$ обозначается *характеристическая функция множества* A, т. е. функция, равная 1 при $\omega \in A$ и 0 при $\omega \notin A$.

из $\mathfrak{B}_0$ представляется в виде суммы конечного или счетного числа множеств B_i, и воспользоваться формулой (3.1).

Во-вторых, случайная величина $\mathsf{M}(\xi/\mathfrak{B}_0)$ постоянна на каждом множестве B_i. Для произвольной σ-алгебры это свойство, конечно, не имеет смысла. Однако нетрудно проверить, что произвольная случайная величина тогда и только тогда постоянна на множествах B_i, когда она измерима относительно σ-алгебры $\mathfrak{B}_0$. Изложенные соображения дают основание в общем случае принять следующие определения (см. А. Н. Колмогоров [1]).

Определение 3.1. *Условным математическим ожиданием* неотрицательной случайной величины $\xi(\omega)$ относительно произвольной σ-алгебры $\mathfrak{B}\subset\mathfrak{A}$ называется $\mathfrak{B}$-измеримая случайная величина $\mathsf{M}(\xi/\mathfrak{B})$, удовлетворяющая для любого $B\in\mathfrak{B}$ равенству

$$\int_B \mathsf{M}(\xi/\mathfrak{B})\,\mathsf{P}\{d\omega\}=\int_B \xi\mathsf{P}\{d\omega\}. \tag{3.2}$$

Определение 3.2. *Условной вероятностью* $\mathsf{P}\{A/\mathfrak{B}\}=\mathsf{P}\{\omega, A/\mathfrak{B}\}$ события $A\subset\mathfrak{A}$ относительно произвольной σ-алгебры $\mathfrak{B}\subset\mathfrak{A}$ называется случайная величина $\mathsf{M}(\chi_A/\mathfrak{B})$.

Ясно из (3.2), что

$$\int_B \mathsf{P}\{A/\mathfrak{B}\}\,\mathsf{P}\{d\omega\}=\mathsf{P}\{AB\},\qquad B\in\mathfrak{B},$$

причем это соотношение вместе с требованием $\mathfrak{B}$-измеримости $\mathsf{P}\{A/\mathfrak{B}\}$ эквивалентно определению 3.2.

Из теоремы Радона — Никодима вытекает, что условное математическое ожидание $\mathsf{M}(\xi/\mathfrak{B})$ существует для любой неотрицательной случайной величины ξ. При этом $\mathsf{M}(\xi/\mathfrak{B})<\infty$ с вероятностью 1, если $\mathsf{M}\xi<\infty$. Последнее замечание позволяет распространить определение условного математического ожидания и на произвольную случайную величину ξ, имеющую математическое ожидание (не обязательно конечное), с помощью формулы

$$\mathsf{M}(\xi/\mathfrak{B})=\mathsf{M}(\xi^+/\mathfrak{B})-\mathsf{M}(\xi^-/\mathfrak{B}).$$

Согласно теореме Радона — Никодима совокупность случайных величин, являющихся условным математическим ожиданием $\xi(\omega)$ относительно σ-алгебры $\mathfrak{B}$, образует класс попарно стохастически эквивалентных случайных величин. Условимся в дальнейшем под $\mathsf{M}\,(\xi/\mathfrak{L})$ понимать какую-нибудь одну случайную величину из этого класса. Аналогичное соглашение примем и относительно условной вероятности $\mathsf{P}\,\{A/\mathfrak{B}\}$. В силу этого и равенства, в которые входят условные математические ожидания и условные вероятности, мы будем понимать (иногда явно не указывая этого) как справедливые почти наверное (п. н.), т. е. с точностью до событий вероятности нуль.

Определим теперь условное математическое ожидание случайной величины $\xi\,(\omega)$, $\omega \in \Omega$, относительно случайного вектора $\eta\,(\omega)$, принимающего значения из l-мерного евклидова пространства E_l, предполагая, что ξ имеет математическое ожидание. Для этого рассмотрим события $\{\eta \in B\}$, где B — множество из борелевской σ-алгебры $\mathfrak{B}_l$. Совокупность событий $\{\eta \in B\}$, $B \in \mathfrak{B}_l$, образует, очевидно, σ-алгебру подмножеств пространства Ω, которую мы обозначим $\mathfrak{A}_\eta$ и назовем *σ-алгеброй, порожденной случайным вектором* η. Положим $\mathsf{M}\,(\xi/\eta) = \mathsf{M}\,(\xi/\mathfrak{A}_\eta)$ и назовем случайную величину $\mathsf{M}\,(\xi/\eta)$ *условным математическим ожиданием* ξ *относительно случайного вектора* η. Аналогично, $\mathsf{P}\,\{A/\eta\} = \mathsf{M}\,(\chi_A/\eta)$ называется *условной вероятностью события A относительно* η.

Можно показать (см., например, Гихман и Скороход [1]), что всегда найдется измеримая относительно $\mathfrak{B}_l$ функция $g\,(x)$, $x \in E_l$, для которой с вероятностью 1

$$\mathsf{M}\,(\xi/\eta) = g\,(\eta),$$

т. е. $\mathsf{M}\,(\xi/\eta)$ есть функция от η.

Последнее равенство дает основание определить математическое ожидание $\mathsf{M}\,(\xi/\eta = x)$ при условии, что η приняло фиксированное значение x, положив

$$\mathsf{M}\,(\xi/\eta = x) = g\,(x).$$

Точно так же определяется и условная вероятность $\mathsf{P}\,\{A/\eta = x\}$.

Рассмотрим теперь основные свойства условных математических ожиданий и условных вероятностей, доказательства которых можно найти, например, в книгах: Колмогоров [1], Дуб [1], Гихман и Скороход [1], Лоэв [1] и др. Предполагаем при этом, что математические ожидания всех случайных величин ξ, η, $a\xi + b\eta$, $\xi\eta$, входящих ниже под знаки условных математических ожиданий, существуют.

а) $$\mathsf{M}(a\xi + b\eta/\mathfrak{B}) = a\mathsf{M}(\xi/\mathfrak{B}) + b\mathsf{M}(\eta/\mathfrak{B})$$

для любых постоянных a, b;

б) $$\mathsf{M}\mathsf{M}(\xi/\mathfrak{B}) = \mathsf{M}\xi. \tag{3.3}$$

(Это равенство немедленно вытекает из (3.2), если положить $B = \Omega$.)

Оказывается также, что при вычислении условных математических ожиданий относительно σ-алгебры $\mathfrak{B}$ с $\mathfrak{B}$-измеримыми случайными величинами можно обращаться так же, как с постоянными при вычислении обычных математических ожиданий. Именно,

в) $$\mathsf{M}(\xi/\mathfrak{B}) = \xi, \text{ если } \xi\ \mathfrak{B}\text{-измерима}. \tag{3.4}$$

(Это свойство вытекает из определения $\mathsf{M}(\xi/\mathfrak{B})$). Более того,

г) $$\mathsf{M}(\xi\eta/\mathfrak{B}) = \xi\mathsf{M}(\eta/\mathfrak{B}), \text{ если } \xi\ \mathfrak{B}\text{-измерима}, \tag{3.5}$$

т. е. $\mathfrak{B}$-измеримые случайные величины можно выносить за знак условного математического ожидания;

д) если $\mathfrak{B}'$ — σ-алгебра, содержащая $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}' \supset \mathfrak{B}$, то

$$\mathsf{M}(\mathsf{M}(\xi/\mathfrak{B})/\mathfrak{B}') = \mathsf{M}(\xi/\mathfrak{B}), \tag{3.6}$$

$$\mathsf{M}(\mathsf{M}(\xi/\mathfrak{B}')/\mathfrak{B}) = \mathsf{M}(\xi/\mathfrak{B}). \tag{3.7}$$

Будем говорить, что две σ-алгебры $\mathfrak{B}_1$ и $\mathfrak{B}_2$ *независимы*, если любые два события $A_1 \in \mathfrak{B}_1$, $A_2 \in \mathfrak{B}_2$ независимы, т. е. $\mathsf{P}\{A_1A_2\} = \mathsf{P}\{A_1\}\mathsf{P}\{A_2\}$.

Случайная величина ξ называется *независимой от σ-алгебры* $\mathfrak{B}$, если $\mathfrak{A}_\xi$ и $\mathfrak{B}$ независимы ($\mathfrak{A}_\xi$ — σ-алгебра, порожденная величиной ξ);

е) $\mathsf{M}(\xi/\mathfrak{B}) = \mathsf{M}\xi$, если ξ и $\mathfrak{B}$ независимы, (3.8)

ж) $\mathsf{P}\{A/\mathfrak{B}\} \geqslant 0$, $\mathsf{P}\{\Omega/\mathfrak{B}\} = 1$,

$$\mathsf{P}\{A/\mathfrak{B}\} = \sum_{k=1}^{\infty} \mathsf{P}\{A_k/\mathfrak{B}\}, \quad \text{если} \quad A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k,$$

где A_k — попарно не пересекающиеся множества. (Напомним, что последние соотношения так же, как и приведенные выше свойства условных математических ожиданий, справедливы лишь с вероятностью 1).

§ 4. Независимость. Произведение мер

В предыдущем параграфе были определены независимые события и σ-алгебры. Для дальнейшего нам потребуются также понятия независимых в совокупности событий, σ-алгебр и случайных величин.

Последовательность событий $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ называется *независимой в совокупности*, если для любых n_i, k, $i = 1, \ldots, k$,

$$\mathsf{P}\left(\bigcap_{i=1}^{k} A_{n_i}\right) = \prod_{i=1}^{k} \mathsf{P}(A_{n_i}).$$

Последовательность σ-алгебр $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_n, \ldots$ называется *независимой в совокупности*, если для любых n_i, k, $i = 1, \ldots, k$, события $A_{n_1} \in \mathfrak{A}_{n_1}, \ldots, A_{n_k} \in \mathfrak{A}_{n_k}$ независимы в совокупности.

Случайные векторы $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ в E_l называются *независимыми в совокупности*, если независимы в совокупности порождаемые ими σ-алгебры $\mathfrak{A}_{\xi 1}, \mathfrak{A}_{\xi 2}, \ldots, \mathfrak{A}_{\xi n}, \ldots$. В частности, две случайные величины ξ и η независимы, если $\mathsf{P}(\xi \in A, \eta \in B) = \mathsf{P}(\xi \in A)\,\mathsf{P}(\eta \in B)$ для любых борелевских множеств A и B.

Рассмотрим, наконец, два множества случайных векторов $\Xi_1 = \{\xi_a,\ a \in A\}$, $\Xi_2 = \{\xi_b,\ b \in B\}$, где A и B — произвольные абстрактные множества. Обозначим $\mathfrak{A}_i$ минимальную σ-алгебру, относительно которой измеримы все случайные векторы из Ξ_i, $i = 1, 2$. Если $\mathfrak{A}_1$ не зависит от $\mathfrak{A}_2$, то множества Ξ_1 и Ξ_2 называются *независимыми*.

Пусть теперь $(\Omega_1, \mathfrak{A}_1)$ и $(\Omega_2, \mathfrak{A}_2)$ — два измеримых пространства. *Прямым произведением* $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$ пространств Ω_1 и Ω_2 называется пространство, образованное парами точек $\omega = (\omega_1, \omega_2)$, где $\omega_1 \in \Omega_1$, $\omega_2 \in \Omega_2$. На этом пространстве можно определить σ-алгебру $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2$, порожденную множествами точек ω вида $\{\omega\colon \omega_1 \in A_1, \omega_2 \in A_2\} = A_1 \times A_2$, где $A_1 \in \mathfrak{A}_1$, $A_2 \in \mathfrak{A}_2$. Если на $(\Omega_1, \mathfrak{A}_1)$ задана мера μ_1, а на $(\Omega_2, \mathfrak{A}_2)$ — мера μ_2, то единственная мера μ на $(\Omega, \mathfrak{A})$, удовлетворяющая условию [1])

$$\mu(A_1 \times A_2) = \mu_1(A_1)\,\mu_2(A_2), \tag{4.1}$$

[1]) Для построения меры μ нужно задать ее на «прямоугольниках» $A_1 \times A_2$ соотношением (4.1), а затем продолжить на $\mathfrak{A}$ в соответствии с известными теоремами о продолжении мер.

называется *произведением* мер μ_1 и μ_2. Эта мера обозначается $\mu_1 \times \mu_2$.

Понятие произведения мер тесно связано с понятием независимости случайных величин. Пусть ξ и η — независимые случайные величины, заданные на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathsf{P})$. Обозначим

$$\mathsf{P}_\xi(A) = \mathsf{P}(A), \quad \text{если} \quad A \in \mathfrak{A}_\xi;$$
$$\mathsf{P}_\eta(B) = \mathsf{P}(B), \quad \text{если} \quad B \in \mathfrak{A}_\eta$$

(P_ξ называют в этом случае *сужением* меры P на $\mathfrak{A}_\xi$).

Из независимости ξ и η вытекает для любых $A \in \mathfrak{A}_\xi$, $B \in \mathfrak{A}_\eta$ равенство

$$\mathsf{P}(AB) = \mathsf{P}_\xi(A)\,\mathsf{P}_\eta(B).$$

Отсюда и из (4.1) следует, что сужение меры P на $\mathfrak{A}_\xi \times \mathfrak{A}_\eta$ можно рассматривать как прямое произведение мер P_ξ и P_η. Поэтому, в частности, справедливо следующее утверждение: если $f(x, y)$ — борелевская функция $x \in E_l$, $y \in E_k$, а ξ и η — независимые случайные величины со значениями в E_l и E_k соответственно, то

$$\mathsf{M} f(\xi(\omega), \eta(\omega)) = \iint f(\xi(\omega_1), \eta(\omega_2))\, \mathsf{P}_\xi \times \mathsf{P}_\eta (d\omega_1 \times d\omega_2). \tag{4.2}$$

Ниже нам понадобится и несколько более общая формула. Пусть $f(x, \omega)$, $(x \in E_l, \ \omega \in \Omega)$, — $\mathfrak{B}_l \times \mathfrak{A}$ — измеримая функция, а ξ — случайная величина, не зависящая от семейства $f(x, \omega)$. Обозначим P_f сужение меры P на минимальную σ-алгебру, относительно которой измеримы случайные величины $f(x, \omega)$, $x \in E_l$.

Тогда

$$\mathsf{M} f(\xi(\omega), \omega) = \iint f(\xi(\omega_1), \omega_2)\, \mathsf{P}_\xi \times \mathsf{P}_f (d\omega_1 \times d\omega_2). \tag{4.3}$$

Сформулируем теперь важную теорему о перемене порядка интегрирования в абстрактных интегралах Лебега.

Теорема Фубини. *Пусть* μ_i — *σ-конечная мера в измеримом пространстве* $(\Omega_i, \mathfrak{A}_i)$, $i = 1, 2$, *а* $f(\omega_1, \omega_2)$ — $\mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2$-*измеримая функция на* $\Omega_1 \times \Omega_2$ *такая, что*

$$\int \left[\int |f(\omega_1, \omega_2)|\, \mu_2(d\omega_2) \right] \mu_1(d\omega_1) < \infty.$$

Тогда для почти всех по мере μ_2 значений ω_2 конечен интеграл $\int |f(\omega_1, \omega_2)| \mu_1(d\omega_1)$ и справедливы равенства

$$\int \left[\int f(\omega_1, \omega_2) \mu_2(d\omega_2) \right] \mu_1(d\omega_1) = \\ = \int \left[\int f(\omega_1, \omega_2) \mu_1(d\omega_1) \right] \mu_2(d\omega_2) = \\ = \iint f(\omega_1, \omega_2) \mu_1 \times \mu_2 (d\omega_1 \times d\omega_2).$$

Рассмотрим два простых следствия из этой теоремы.

1. Пусть $f(\omega_1, \omega_2) = \xi(\omega_1) \eta(\omega_2)$. Тогда из (4.2) и теоремы Фубини для независимых случайных величин ξ и η получим равенство $\mathsf{M}(\xi\eta) = \mathsf{M}\xi \mathsf{M}\eta$, если $\mathsf{M}\xi$ и $M\eta$ конечны.

2. Пусть $\xi_1, \ldots, \xi_n, \ldots$ — неотрицательные случайные величины и ряд

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mathsf{M}\xi_i$$

сходится. Тогда и ряд

$$\sum_{i=1}^{\infty} \xi_i$$

сходится п. н. Этот факт вытекает из теоремы Фубини, если учесть, что сумму можно рассматривать как интеграл по σ-конечной «считающей» мере, т. е. по мере, определенной на подмножествах натурального ряда и равной количеству натуральных чисел в данном подмножестве.

Пользуясь представлением (4.3) и теоремой Фубини, решите следующую задачу.

З а д а ч а 4.1. Пусть функция $f(x, \omega)$ со значениями из E_k $\mathfrak{B}_l \times \mathfrak{A}$-измерима, а множество случайных векторов $f(x, \omega)$, $x \in E_l$ не зависит от случайного вектора $\xi = \xi(\omega)$ из E_l. Доказать, что тогда

а) $$\mathsf{M}(f(\xi, \omega)/\xi = x) = \mathsf{M}f(x, \omega),$$

б) $$\mathsf{M}f(\xi, \omega) = \mathsf{M}\{[\mathsf{M}f(x, \omega)]|_{x=\xi}\},$$

в) $$\mathsf{P}\{f(\xi, \omega) \in B/\xi = x\} = \mathsf{P}\{f(x, \omega) \in B\}, \quad B \in \mathfrak{B}_k.$$

§ 5. Мартингалы и супермартингалы

В ближайших двух параграфах мы кратко изучим основные нужные для дальнейшего свойства двух типов случайных процессов с дискретным временем: мартингалов и марковских процессов. При этом под *случайным процессом с дискретным временем* мы будем понимать просто последовательность случайных величин $X(t) = X(t, \omega)$, $t = 0, 1, 2, \ldots$ (быть может, и векторных), заданных на некотором вероятностном пространстве. Последовательность $X(t, \omega)$, рассматриваемая как функция от t, называется *траекторией* процесса.

Понятие мартингала возникает естественным образом в связи с определением безобидной игры. Если $X(t)$ — выигрыш к моменту времени t $(t = 1, 2, \ldots)$, то смысл безобидной игры должен состоять в том, чтобы при любом течении игры до момента t средний выигрыш в t-й партии равнялся нулю. С математической точки зрения последнее означает, что $\mathsf{M}(X(t)/X(1), \ldots, X(t-1)) = X(t-1)$. Следующее более общее определение охватывает, в частности, только что описанную ситуацию.

Определение 5.1. Пусть $X(t)$, $t = 1, 2, \ldots$,— последовательность случайных величин с конечными математическими ожиданиями, а $\mathfrak{A}_t$, $t = 1, 2, \ldots$,— последовательность вложенных σ-алгебр, так что $\mathfrak{A}_1 \subset \mathfrak{A}_2 \subset \ldots \subset \mathfrak{A}_t \subset \ldots$ Пусть, далее, $X(t)$ измерима относительно $\mathfrak{A}_t$. Пара $(X(t), \mathfrak{A}_t)$ называется *мартингалом*, если

$$\mathsf{M}(X(t+1)/\mathfrak{A}_t) = X(t), \tag{5.1}$$

и *супермартингалом*, если

$$\mathsf{M}(X(t+1)/\mathfrak{A}_t) \leqslant X(t). \tag{5.2}$$

Замечание 5.1. Так как в силу свойства (3.7) условного математического ожидания при $s < t$

$$\mathsf{M}(X(t)/\mathfrak{A}_s) = \mathsf{M}((\mathsf{M}(X(t)/\mathfrak{A}_{t-1})/\mathfrak{A}_s) =$$
$$= \mathsf{M}(X(t-1)/\mathfrak{A}_s) = \ldots = \mathsf{M}(X(s+1)/\mathfrak{A}_s) = X(s),$$

то в качестве определения мартингала можно принять соотношение

$$\mathsf{M}(X(t)/\mathfrak{A}_s) = X(s), \qquad s < t,$$

равносильное (5.1). Точно так же неравенство (5.2) эквивалентно неравенству $\mathsf{M}\,(X\,(t)/\mathfrak{A}_s) \leqslant X\,(s)$, $s < t$.

Замечание 5.2. Если $(X\,(t),\ \mathfrak{A}_t)$ — мартингал (супермартингал), то математическое ожидание $\mathsf{M}X\,(t)$ не зависит от t (не возрастает с ростом t). Для доказательства достаточно взять математическое ожидание левой и правой частей формулы (5.1) (или (5.2)) и воспользоваться свойством (3.3).

Примеры. а) Пусть $\xi\,(t)$, $t = 1, 2, \ldots,$ — последовательность независимых в совокупности случайных величин с нулевым математическим ожиданием и $\mathfrak{A}_t$ — минимальная σ-алгебра, порожденная случайным вектором $(\xi\,(1), \ldots, \xi\,(t))$. Положим $X\,(t) = \sum\limits_{i=1}^{t} \xi\,(i)$. Тогда в силу измеримости $X\,(t)$ относительно σ-алгебры $\mathfrak{A}_t$ и (3.4) $\mathsf{M}\,(X\,(t)/\mathfrak{A}_t) = X\,(t)$. Кроме того, согласно (3.8), $\mathsf{M}\,(\xi\,(t+1)/\mathfrak{A}_t) = \mathsf{M}\xi\,(t+1) = 0$, поскольку $\xi\,(t+1)$ не зависит от $\mathfrak{A}_t$. Поэтому

$$\mathsf{M}\,(X\,(t+1)/\mathfrak{A}_t) = \mathsf{M}\,(X\,(t) + \xi\,(t+1)/\mathfrak{A}_t) = X\,(t),$$

т. е. $(X\,(t),\ \mathfrak{A}_t)$ — мартингал.

б) Пусть $\mathfrak{A}_1 \subset \mathfrak{A}_2 \subset \ldots \subset \mathfrak{A}_t \subseteq \ldots$ — последовательность σ-алгебр и η — случайная величина с конечным математическим ожиданием. Положим $X\,(t) = \mathsf{M}\,(\eta/\mathfrak{A}_t)$. Тогда $(X\,(t),\ \mathfrak{A}_t)$ — мартингал. Действительно, в силу (3.7),

$$\mathsf{M}\,(X\,(t+1)/\mathfrak{A}_t) = \mathsf{M}\,(\mathsf{M}\,(\eta/\mathfrak{A}_{t+1})/\mathfrak{A}_t) = \mathsf{M}\,(\eta/\mathfrak{A}_t) = X\,(t).$$

Следующая важная теорема о предельном поведении супермартингалов неоднократно будет использоваться ниже.

Теорема 5.1. *Пусть* $(X\,(t),\ \mathfrak{A}_t)$, $t = 1, 2, 3, \ldots$ — *неотрицательный супермартингал. Тогда с вероятностью 1 существует конечный предел* $X\,(\omega) = \lim\limits_{t\to\infty} X\,(t)$.

Докажем предварительно две леммы, первая из которых не имеет отношения к теории вероятностей.

Лемма 5.1. *Пусть* $H = H_{a,\,b}^{(T)}$ — *число пересечений снизу вверх отрезка* $[a, b]$, $b > a$, *последовательностью* $X\,(t)$, $t = 1, 2, \ldots, T$. *Тогда*

$$(b-a)\,H_{a,\,b}^{(T)} \leqslant (a - X\,(T))^{+} + \sum_{t=1}^{T-1} I\,(t)\,(X\,(t+1) - X\,(t)), \quad (5.3)$$

где члены последовательности $I(t)$, $t = 1, 2, \ldots, T-1$, *принимают значения* 0 *или* 1, *причем величина* $I(t)$ *полностью определяется по величинам* $X(1), \ldots, X(t)$.

Доказательство. Обозначим t_1 — первый момент времени, когда величина $X(t)$ приняла значение меньше a, t_2 — первый после t_1 момент, когда $X(t) > b$; t_3 — первый после t_2 момент, когда $X(t) < a$, и т. д.

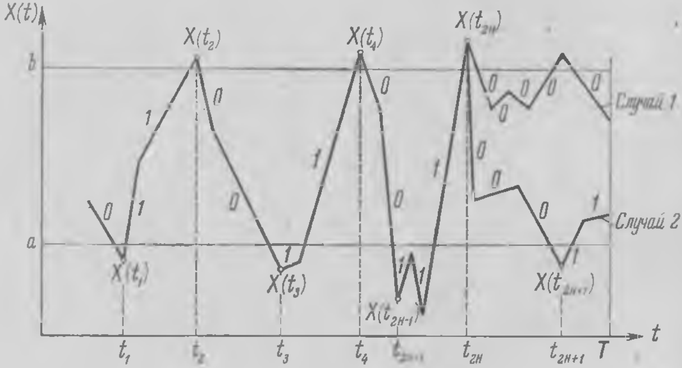

Рис. 1.

Тогда на отрезке времени $[t_{2H}, T]$ последовательность $X(t)$ уже ни разу не пересечет $[a, b]$ снизу вверх, причем, как легко видеть (рис. 1),

$$(b-a)\, H_{a,b}^{(T)} \leqslant \sum_{i=1}^{H} [X(t_{2i}) - X(t_{2i-1})]. \tag{5.4}$$

Определим теперь функцию $I(t)$ так, чтобы она меняла значение с 0 на 1 и, наоборот, в точках t_k и только в них [1]). При этом мы полагаем $I(t_1) = 1$, так что, например, $I(1) = 0$, если $t_1 > 1$, и $I(1) = 1$, если $t_1 = 1$.

Для того чтобы выяснить значение $I(t)$ при $t = T$, рассмотрим два случая: 1) если последовательность $X(t)$ после момента t_{2H} ни разу не примет значения, меньшего a, то $I(T) = 0$; 2) если же после t_{2H} найдется момент времени t_{2H+1}, когда последовательность (впервые после t_{2H}) примет значение, меньшее a, то $I(T) = 1$.

---

[1]) Точнее, при переходе от t_{k-1} к t_k.

Неравенство (5.3) проверяется непосредственно при $H_{a,b}^{(T)} = 0$. Пусть $H_{a,b}^{(T)} \geqslant 1$. Очевидно, значение функции $I(t)$ в фиксированный момент времени t ($t = 1, 2, \ldots, T$) полностью определяется по величинам $X(1), \ldots, X(t)$. При этом справедливо одно из равенств

$$\sum_{t=1}^{T-1} I(t)(X(t+1) - X(t)) =$$
$$= \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{H} (X(t_{2i}) - X(t_{2i-1})) & \text{в случае 1),} \\ \sum\limits_{i=1}^{H} (X(t_{2i}) - X(t_{2i-1})) + X(T) - X(t_{2H+1}) & \text{в случае 2).} \end{cases} \tag{5.5}$$

Из (5.4), (5.5) вытекает, что

$$\sum_{t=1}^{T-1} I(t)(X(t+1) - X(t)) \geqslant$$
$$\geqslant \begin{cases} (b-a) H_{a,b}^{(T)} & \text{в случае 1),} \\ (b-a) H_{a,b}^{(T)} - X(t_{2H+1}) + X(T) & \text{в случае 2).} \end{cases}$$

Учитывая, наконец, что $X(t_{2H+1}) < a$, получаем отсюда нужную оценку (5.3).

Лемма 5.2. *Пусть* $(X(t) = X(t, \omega), \mathfrak{A}_t)$ *— неотрицательный супермартингал и* $H_{a,b}^{(T)} = H_{a,b}^{(T)}(\omega)$ *— случайная величина, равная числу пересечений отрезка* $[a, b]$, $b > a$, *снизу вверх последовательностью* $X(1), \ldots, X(T)$. *Тогда*

$$\mathsf{M} H_{a,b}^{(T)}(\omega) \leqslant \frac{\mathsf{M}(a - X(T))^{+}}{b-a}. \tag{5.6}$$

Доказательство. Согласно лемме 5.1 для любого ω справедливо неравенство

$$(b-a) H_{a,b}^{(T)} \leqslant (a - X(T))^{+} + \sum_{t=1}^{T-1} I(t)(X(t+1) - X(t)), \tag{5.7}$$

где $I(t) = I(t, \omega)$ — случайная величина, измеримая относительно σ-алгебры $\mathcal{N}_t$, порожденной случайными величинами $X(1), \ldots, X(t)$. Поэтому, беря математическое ожидание от левой и правой части неравенства (5.7) и учитывая свойства (3.3), (3.5) условного математического ожидания, получим

$$(b-a)\,\mathsf{M}H_{a,\,b}^{(T)}\leqslant \mathsf{M}\,(a-X\,(T))^{+}+\sum_{t=1}^{T-1}\mathsf{M}\mathsf{M}\,(I\,(t)\,(X\,(t+1)-X\,(t))/\mathcal{N}_t)=\mathsf{M}\,(a-X\,(T))^{+}+\sum_{t=1}^{T-1}\mathsf{M}\,(I\,(t)\,\mathsf{M}\,(X\,(t+1)-X\,(t)/\mathcal{N}_t)). \quad (5.8)$$

Далее, поскольку $(X\,(t),\mathfrak{A}_t)$ — супермартингал, то

$$\mathsf{M}\,(X\,(t+1)-X\,(t)/\mathfrak{A}_t)\leqslant 0.$$

Учитывая, наконец, что $\mathcal{N}_t\subset\mathfrak{A}_t$, получим отсюда и из (3.7), что

$$\mathsf{M}\,(X\,(t+1)-X\,(t)/\mathcal{N}_t)\leqslant 0. \quad (5.9)$$

Утверждение леммы является теперь следствием (5.8), (5.9).

Доказательство теоремы 5.1. Обозначим B событие, состоящее в том, что не существует конечного предела $X\,(t)$ при $t\to\infty$. Тогда

$$B=A_1\cup A_2, \quad (5.10)$$

где $A_1=\{\varliminf_{t\to\infty}X\,(t,\,\omega)=\infty\}$, $A_2=\{\varliminf_{t\to\infty}X\,(t,\,\omega)<\varlimsup_{t\to\infty}X\,(t,\,\omega)\}$.

В силу замечания 5.2 $\mathsf{M}X\,(t,\,\omega)<C$ для всех $t\geqslant 1$. Поэтому согласно лемме Фату

$$\mathsf{M}\varliminf_{t\to\infty}X\,(t,\,\omega)<C$$

и, значит,

$$\mathsf{P}\,\{A_1\}=0. \quad (5.11)$$

Кроме того,

$$A_2=\bigcup_{r_1<r_2}\{\varliminf_{t\to\infty}X\,(t,\,\omega)<r_1<r_2<\varlimsup_{t\to\infty}X\,(t,\,\omega)\}\subseteq\bigcup_{r_1<r_2}\{H_{r_1,\,r_2}^{(\infty)}(\omega)=\infty\}. \quad (5.12)$$

Здесь суммирование событий производится по всем рациональным числам r_1, r_2, а $H_{r_1,\,r_2}^{(\infty)}(\omega)=\lim_{T\to\infty}H_{a,\,b}^{(T)}(\omega)$.

Из леммы 5.2 имеем

$$\mathsf{M}H^{(T)}_{r_1, r_2}(\omega) \leqslant \frac{r_1}{r_2 - r_1},$$

так как в условиях теоремы $(a - X(T))^+ \leqslant a$. Поэтому, применяя еще раз лемму Фату, получим

$$\mathsf{M}H^{(\infty)}_{r_1, r_2}(\omega) \leqslant \frac{r_1}{r_2 - r_1},$$

откуда следует, что

$$\mathsf{P}\{H^{(\infty)}_{r_1, r_2} = \infty\} = 0. \tag{5.13}$$

Таким образом, в силу (5.12), (5.13)

$$\mathsf{P}\{A_2\} \leqslant \sum_{r_1 < r_2} \mathsf{P}\{H^{(\infty)}_{r_1, r_2}(\omega) = \infty\} = 0. \tag{5.14}$$

Утверждение теоремы немедленно вытекает из (5.10), (5.11) и (5.14).

Из теоремы 5.1 и леммы 2.1 вытекает

Следствие 5.1. Если $X(t)$ — положительный супермартингал и при некотором $\alpha > 1$ функция $\mathsf{M}\,|X(t)|^\alpha$ ограничена, то

$$\lim_{t \to \infty} \mathsf{M}X(t) = \mathsf{M}X = \mathsf{M}\lim_{t \to \infty} X(t).$$

Мы предлагаем проверить читателю, что из приведенных при доказательстве теоремы 5.1 рассуждений следует и более общая

Теорема 5.1. *Пусть $(X_t = X_t(\omega), \mathfrak{A}_t)$, $t = 1, 2, \ldots$, — супермартингал, причем функция $\mathsf{M}X_t^- = \mathsf{M}\max(-X_t, 0)$ ограничена. Тогда с вероятностью 1 существует конечный предел X_t при $t \to \infty$. Условие ограниченности $\mathsf{M}X_t^-$ может быть заменено условием: $\mathsf{M}\,|X_t|^\alpha < K$ для некоторого $\alpha \geqslant 1$ и всех $t = 1, 2, 3, \ldots$*

ГЛАВА 2

МАРКОВСКИЕ ПРОЦЕССЫ С ДИСКРЕТНЫМ ВРЕМЕНЕМ

Определяется марковский случайный процесс с дискретным временем и изучаются некоторые его свойства. Выясняется, в частности, связь между такими процессами и супермартингалами. Приводятся условия, при выполнении которых процесс, определенный рекуррентно, будет марковским. Рассмотрены некоторые частные задачи для марковских процессов, например, задача о выходе из области. Приведены условия, гарантирующие сходимость траекторий к некоторому предельному множеству при $t \to \infty$. Рассмотрено также приложение доказанных теорем к исследованию условий сходимости ряда из независимых случайных величин и к задаче обучения машины распознаванию образов.

§ 1. Марковские процессы

В основе понятия марковского процесса $X(t)$, $t = 0, 1, 2, \ldots$, со значениями в E_l лежит представление о системе без последействия, т. е. о системе, поведение которой в будущем зависит лишь от ее состояния в настоящий момент времени и не зависит от прошлого. Тем самым условная вероятность события $X(t) \in \Gamma$ при условии $X(s) = x$ для марковского процесса не меняется, если дополнительно известно его течение до момента s. Эту вероятность, называемую *переходной вероятностью* марковского процесса, мы будем обозначать $P(s, x, t, \Gamma)$. Естественно, что $P(s, x, t, \Gamma)$ должна быть вероятностной мерой как функция Γ и $\mathfrak{B}_l$-измеримой как функция x. Кроме того, если $s < u < t$ — три момента времени, то процесс, выходящий из точки x в момент времени s и попавший в множество Γ в момент времени t, должен пройти некоторое промежуточное состояние y в момент u (рис. 2). Поэтому, учитывая независимость от прошлого, естественно ожидать справедливость *соотношения Чепмена — Колмогорова*:

$$P(s, x, t, \Gamma) = \int_A P(s, x, u, dy)\, P(u, y, t, \Gamma). \qquad (1.1)$$

Определение 1.1. Пусть A — борелевское множество, а функция $P(s, x, t, \Gamma)$ определена при $x \in A$, $0 \leqslant s \leqslant t$, $\Gamma \subset A$, причем $\Gamma \in \mathfrak{B}_l$. Если эта функция $\mathfrak{B}_l$-измерима по x, является вероятностной мерой по Γ $(P(s, x, t, A) = 1)$ и удовлетворяет при $s < u < t$ соотношению (1.1), то она называется *переходной функцией* в A.

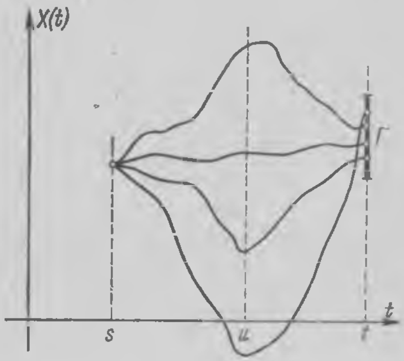

Рис. 2.

Определение 1.2. Пусть $P(s, x, t, \Gamma)$ — некоторая переходная функция в A, $A \in \mathfrak{B}_l$. Процесс $X(t)$, $t = 0, 1, 2, \ldots$, в A называется *марковским* с этой переходной функцией, если для $s < u < t$

$$\mathsf{P}\{X(t) \in \Gamma / X(s), X(s+1), \ldots, X(u)\} = \\ = P(u, X(u), t, \Gamma) \text{ (п. н.)}. \qquad (1.2)$$

Изучим некоторые основные свойства марковских процессов.

1. Вычисляя математическое ожидание левой и правой части (1.2) при условии $X(u)$, получим с учетом (1.3.4), (1.3.7)

$$\mathsf{P}\{X(t) \in \Gamma / X(u)\} = P(u, X(u), t, \Gamma), \quad t > u \text{ (п. н.)}. \qquad (1.3)$$

2. Обозначим $\mathscr{N}_t$ σ-алгебру событий, порожденную случайными величинами $X(u)$, $u \leqslant t$.

Из (1.2) и определения условной вероятности

$$\mathsf{P}\{X(t) \in \Gamma / X(0), \ldots, X(u)\} = \mathsf{P}\{X(t) \in \Gamma / \mathscr{N}_u\}$$

вытекает, что

$$\mathsf{P}\{A \cap \{X(t) \in \Gamma\}\} = \mathsf{M}\chi_A P(u, X(u), t, \Gamma) \quad (1.4)$$

для любого события $A \in \mathscr{N}_u$, $u < t$.

3. Обозначим $Q(\Gamma) = \mathsf{P}\{X(t_0) \in \Gamma\}$, $t_0 \geqslant 0$, начальное распределение вероятностей марковского процесса $X(t)$, $t \geqslant t_0$. Тогда в силу (1.4) имеем при $t_0 < t_1$

$$\mathsf{P}\{X(t_1) \in \Gamma\} = \mathsf{M}P(t_0, X(t_0), t_1, \Gamma) = \int Q(dx_0) P(t_0, x_0, t_1, \Gamma). \quad (1.5)$$

Аналогично при $t_1 < t_2$

$$\mathsf{P}\{X(t_1) \in \Gamma_1, X(t_2) \in \Gamma_2\} = \mathsf{M}\chi_{\{X(t_1) \in \Gamma_1\}} P(t_1, X(t_1), t_2, \Gamma_2) = \\ = \int\limits_{\Gamma_1} P(t_1, x, t_2, \Gamma_2) \mathsf{P}\{X(t_1) \in dx\}.$$

Отсюда и из (1.5) получаем равенство

$$\mathsf{P}\{X(t_1) \in \Gamma_1, X(t_2) \in \Gamma_2\} = \\ = \int Q(dx_0) \int\limits_{\Gamma_1} P(t_0, x_0, t_1, dy_1) \int\limits_{\Gamma_2} P(t_1, x_1, t_2, dy_2).$$

Точно так же убеждаемся в справедливости общей формулы

$$\mathsf{P}\{X(t_1) \in \Gamma_1, X(t_2) \in \Gamma_2, \ldots, X(t_n) \in \Gamma_n\} = \\ = \int Q(dx_0) \int\limits_{\Gamma_1} P(t_0, x_0, t_1, dy_1) \ldots \\ \ldots \int\limits_{\Gamma_{n-1}} P(t_{n-2}, x_{n-2}, t_{n-1}, dx_{n-1}) \int\limits_{\Gamma_n} P(t_{n-1}, x_{n-1}, t_n, dx_n).$$

Переходная функция $P(s, x, t, \Gamma)$ называется *однородной*, если $P(s, x, t+s, \Gamma)$ не зависит от s.

Из (1.3) вытекает, что условную вероятность $\mathsf{P}\{X(t) \in \in \Gamma / X(u)\}$, $u < t$, можно выбрать так, чтобы она представляла собой меру по Γ. Такой выбор условной вероятности называется ее *регуляризацией*. При этом можно доказать (см. Гихман и Скороход [1]), что условное математическое ожидание есть интеграл по условной мере. В частности, для марковского процесса $X(t)$ при $u < t$

$$\mathsf{M}\{f(X(t)) \,/\, X(u)\} = \int f(y)\, P(u, X(u), t, dy) \text{ (п.н.)}. \quad (1.6)$$

При решении рассматриваемых ниже задач, связанных с марковским процессом $X(t)$, $t = t_0, t_0 + 1, \ldots$ $\ldots, t_0 \geqslant 0$, со значениями в E_l и переходной функцией $P(s, x, t, \Gamma)$, удобно ввести следующий оператор L, действующий на функцию $V(t, x)$, $x \in E_l$, по формуле

$$LV(t, x) =$$
$$= \int P(t, x, t+1, dy)\,[V(t+1, y) - V(t, x)]. \quad (1.7)$$

Величину $LV(t, x)$ можно интерпретировать как среднее приращение за один шаг функции $V(t, x)$ на траектории марковского процесса $X(u)$, выходящего из точки x в момент времени t. Оператор L будем называть *производящим.* Его можно применять к функции $V(t, x)$ в точке (t, x) лишь в том случае, когда интеграл в правой части равенства (1.7) конечен. В этом случае будем говорить, что $V(t, x)$ принадлежит *области определения оператора* L в точке (t, x), и писать $V(t, x) \in D_L^{(t, x)}$. Будем также говорить, что $V(t, x) \in D_L$ в области B, если $V(t, x) \in D_L^{(t, x)}$ для всех $(t, x) \in B$.

При определении случайного процесса с дискретным временем мы предполагали, что моменты времени t являются целыми числами 0, 1, 2 ... Ничего, однако, не изменится, если в качестве моментов времени выбрать последовательность чисел s, $s + h$, $s + 2h$, ..., где $h > 0$. Определение случайного процесса с дискретным временем (и марковского процесса, в частности) без изменения переносится и на этот случай [1]). В качестве производящего оператора при этом естественно взять оператор, определяемый формулой

$$L_h V(t, x) = \frac{1}{h} \int P(t, x, t+h, dy)\,[V(t+h, y) - V(t, x)].$$

[1]) Рассмотрение процесса $X(t)$, $t = s$, $s + h$, $s + 2h, \ldots$ с шагом h эквивалентно рассмотрению процесса $\bar{X}(t_1) = X(s + ht_1)$ $(t_1 = 0, 1, 2, \ldots)$ с шагом 1.

Множитель $1/h$ можно и не вводить до тех пор, пока рассматриваются процессы с фиксированным шагом h; однако этот множитель удобен для предельного перехода к процессам с непрерывным временем ($h \to 0$), см. §§ 3.2, 3.3. В большей части дальнейшего изложения мы все же ограничимся для краткости случаем $h = 1$. Однако читателю следует иметь в виду, что все доказанные ниже теоремы применимы и в случае любого шага h.

§ 2. Марковские процессы и супермартингалы

Возможность применения свойств мартингалов и супермартингалов к изучению предельного поведения траекторий марковского процесса основана на следующей теореме (см., например, Дуб [1]).

Рассмотрим марковский случайный процесс $X(t)$, $t \geqslant t_0$, в E_l. Обозначим τ_G момент первого выхода из области G траектории процесса, а $\tau_G \wedge t = \min(\tau_G, t)$ (при этом полагаем $\tau_G = t_0$, если $X(t_0) \bar{\in} G$).

Теорема 2.1. *Пусть $V(t, x)$ — неотрицательная функция, $V(t, x) \in D_L$ в области $t \geqslant t_0$, $x \in D$, причем $LV(t, x) \leqslant 0$ $(LV(t, x) = 0)$ в этой области, а $\mathsf{M}V(t_0, X(t_0)) < \infty$. Тогда $\{Y(t) = V(\tau_G \wedge t, X(\tau_G \wedge t)), \mathscr{N}_t\}$ — супермартингал (мартингал) при $t \geqslant t_0$.*

Доказательство. Пусть $t \geqslant t_0$, $\tau = \tau_G$. В силу очевидных равенств

$$\tau \wedge (t+1) = \begin{cases} \tau, & \text{если} \quad \tau \leqslant t, \\ t+1, & \text{если} \quad \tau > t, \end{cases}$$

имеем

$$\begin{aligned} Y(t+1) = V(\tau \wedge (t+1), X(\tau \wedge (t+1)))\chi_{\{\tau \leqslant t\}} + \\ + V(\tau \wedge (t+1), X(\tau \wedge (t+1)))\chi_{\{\tau > t\}} = \\ = V(\tau, X(\tau))\chi_{\{\tau \leqslant t\}} + V(t+1, X(t+1))\chi_{\{\tau > t\}} \end{aligned}$$

и, значит,

$$\begin{aligned} \mathsf{M}(Y(t+1)/\mathscr{N}_t) = \\ = \mathsf{M}(V(\tau, X(\tau))\chi_{\{\tau \leqslant t\}}/\mathscr{N}_t) + \\ + \mathsf{M}(V(t+1, X(t+1))\chi_{\{\tau > t\}}/\mathscr{N}_t). \quad (2.1) \end{aligned}$$

Так как случайная величина $V(\tau, X(\tau))\chi_{\{\tau\leqslant t\}}$ определяется по течению процесса $X(t)$ до момента времени t, то она измерима относительно σ-алгебры $\mathcal{N}_t$. Поэтому, применяя свойство (1.3.5) условного математического ожидания и используя марковское свойство процесса $X(t)$, получим из (2.1)

$$\mathsf{M}(Y(t+1)/\mathcal{N}_t) = V(\tau, X(\tau))\chi_{\{\tau\leqslant t\}} + \mathsf{M}(V(t+1, X(t+1))\chi_{\{\tau>t\}}/\mathcal{N}_t). \quad (2.2)$$

Так как событие $\{\tau > t\}$ влечет за собой событие $\{X(t)\in G\}$ и $\{\tau>t\}\in\mathcal{N}_t$, то в силу (1.3.5), (1.6), учитывая, что $X(t)$ — марковский случайный процесс, имеем

$$\mathsf{M}(V(t+1, X(t+1))\chi_{\{\tau>t\}}/\mathcal{N}_t) = \chi_{\{\tau>t\}}\mathsf{M}(\chi_{\{X(t)\in G\}}V(t+1, X(t+1))/X(t)) = \chi_{\{\tau>t\}}\int V(t+1, y)P(t, X(t), t+1, dy)\chi_{\{X(t)\in G\}} \quad \text{(п. н.)}.$$

С другой стороны, согласно условию теоремы, $LV(t, x)\leqslant 0$ для $x\in G$ и, значит,

$$\int V(t+1, y)P(t, x, t+1, dy)\leqslant V(t, x),$$

если $x\in G$. Следовательно,

$$\mathsf{M}(\chi_{\{\tau>t\}}V(t+1, X(t+1))/\mathcal{N}_t)\leqslant \chi_{\{\tau>t\}}V(t, X(t)) \quad \text{(п. н.)}. \quad (2.3)$$

Из (2.2), (2.3) получаем

$$\mathsf{M}(Y(t+1)/\mathcal{N}_t)\leqslant V(\tau, X(\tau))\chi_{\{\tau\leqslant t\}} + \chi_{\{\tau>t\}}V(t, X(t)) = Y(t). \quad (2.4)$$

Аналогично,

$$\mathsf{M}(Y(t+1)/\mathcal{N}_t) = Y(t),$$

если $LV(t, x) = 0$ в области $t\geqslant t_0$, $x\in G$. Конечность $\mathsf{M}Y(t)$ при всех $t\geqslant t_0$ вытекает из (2.4) и конечности $\mathsf{M}V(t_0, X(t_0))$. Теорема доказана.

Важным для дальнейшего следствием доказанной теоремы (при $G = E_l$, $\tau_G\equiv\infty$) является

Теорема 2.2. *Пусть $V(t, x)$ — неотрицательная функция, причем $V(t, x)\in D_L$ и $LV\leqslant 0$ в области $t\geqslant t_0$,*

$x \in E_l$. *Тогда* $(V(t, X(t)), \mathcal{N}_t)$ — *супермартингал, если только* $\mathsf{M}V(t_0, X(t_0)) < \infty$.

Следующая задача содержит частный случай неравенства Колмогорова для супермартингалов.

Задача 2.1. Пусть функция $V(x)$ удовлетворяет условиям теоремы 2.2. Показать, что для любого $C > 0$

$$\mathsf{P}\{\sup_{t \geqslant t_0} V(X(t)) \geqslant C\} \leqslant \frac{1}{C} \mathsf{M}V(X(t_0)). \qquad (2.5)$$

Указание. Применить теорему 2.1 к $\tau(C)$ — моменту выхода траектории $X(t)$ из области $\{x: V(x) < C\}$.

§ 3. Процесс, определенный рекуррентно

Рассмотрим в E_l случайный процесс, определяемый рекуррентным соотношением

$$X(t+1) = \Phi(t+1, X(t), \xi(t+1)),$$
$$t = s, s+1, \ldots, \qquad (3.1)$$

где $\Phi(t+1, x, y)$, $x \in E_l$, $y \in E_q$, при каждом t — измеримая по Борелю функция $l+q$ переменных x, y, а $\xi(s+1)$, $\xi(s+2)$, ...— некоторые случайные векторы со значениями из E_q.

Для того чтобы рекуррентное соотношение (3.1) определяло некоторый процесс $X(t)$, необходимо задать начальное условие $X(s)$ в момент времени s. Процесс $X(t)$ с таким начальным условием будем обозначать $X^{s, X(s)}(t)$. Если, в частности, $X(s) = x$ не случайно, то $X^{s, x}(t)$ — процесс, выходящий в момент времени s из фиксированной точки x.

Очевидно, при всех $t > u > s$ справедливо тождество

$$X^{s, x}(t) \equiv X^{u, X^{s, x}(u)}(t). \qquad (3.2)$$

Пусть случайные величины $X(s)$, $\xi(s+1)$, $\xi(s+2)$, ... независимы в совокупности. Тогда из вида системы (3.1) вытекает и независимость $X(u) = X^{s, X(s)}(u)$, $\xi(u+1)$, $\xi(u+2)$, ... при $u > s$. При этом процесс $X(t) = X^{s, X(s)}(t)$ полностью определяется по величинам s, $X(s)$, $\xi(s+1)$, $\xi(s+2)$, ..., $\xi(t)$, т. е.

$$X^{s, X(s)}(t) = \Psi(s, X(s), t, \xi(s+1), \ldots, \xi(t)).$$

Положим для любого $x \in E_l$

$$P(s, x, t, \Gamma) = \mathsf{P}\{X^{s,x}(t) \in \Gamma\}. \qquad (3.3)$$

Можно показать, что определенная таким образом функция $\mathfrak{B}_l$-измерима по x и является мерой по Γ. Кроме того, для любых $s < u < t$, учитывая независимость $X(u)$ от $\xi(u+1)$, $\xi(u+2)$, ..., получим в силу утверждения б) задачи 1.4.1

$$P(s, x, t, \Gamma) = \mathsf{P}\{X^{s,x}(t) \in \Gamma\} = \mathsf{P}\{X^{u, X^{s,x}(u)}(t) \in \Gamma\} =$$
$$= \mathsf{M}\chi_\Gamma(\Psi(u, X(u), t, \xi(u+1), \xi(u+2), \ldots, \xi(t))) =$$
$$= \mathsf{M}[\mathsf{M}\chi_\Gamma(\Psi(u, y, t, \xi(u+1), \xi(u+2), \ldots, \xi(t)))]_{y=X(u)} =$$
$$= \mathsf{M}P(u, X(u), t, \Gamma).$$

Отсюда и из (3.3) следует равенство

$$P(s, x, t, \Gamma) = \int P(s, x, u, dy)\, P(u, y, t, \Gamma).$$

Таким образом, функция $P(s, x, t, \Gamma)$ является переходной функцией.

Далее, в силу независимости случайного вектора $(X(s), X(s+1), \ldots, X(u))$ от $\xi(u+1)$ и утверждения в) той же задачи 1.4.1

$$\mathsf{P}\{X^{s, X(s)}(u+1) \in \Gamma / X(s), X(s+1), \ldots, X(u)\} =$$
$$= \mathsf{P}\{\Phi(u+1, X(u), \xi(u+1)) \in$$
$$\in \Gamma / X(s), X(s+1), \ldots, X(u)\} =$$
$$= [\mathsf{P}\{\Phi(u+1, y, \xi(u+1)) \in \Gamma\}]_{y=X(u)} =$$
$$= P(u, X(u), u+1, \Gamma).$$

Аналогично

$$\mathsf{P}\{X^{s, X(s)}(t) \in \Gamma / X(s), X(s+1), \ldots, X(u)\} =$$
$$= P(u, X(u), t, \Gamma)$$

и для любых $t > u \geqslant s$.

Из приведенных рассуждений вытекает

Теорема 3.1. *Пусть $\Phi(t, x, y)$ при каждом $t \geqslant s$ — измеримая по Борелю функция переменных x, y, а $X(s)$, $\xi(s+1)$, $\xi(s+2)$, ... — независимые в совокупности случайные величины. Тогда процесс $X(t) = X^{s, X(s)}(t)$, определяемый рекуррентным соотношением* (3.1) *и началь-*

ным условием $X(s)$, *является марковским. Его переходная функция* $P(u, x, u+1, \Gamma\}$ *за один шаг равна*

$$\mathsf{P}\{\Phi(u+1, x, \xi(u+1)) \in \Gamma\}.$$

Хотя описанный в настоящем параграфе способ получения марковских процессов из последовательности независимых случайных векторов $\xi(t)$ с помощью рекуррентной формулы (3.1) является довольно частным, однако можно показать, что весьма широкий класс марковских процессов с дискретным временем может быть получен таким путем.

Задача 3.1. Пусть $\xi(t) = \{\xi_1(t), \ldots, \xi_N(t)\}$, $t = 1, 2, \ldots,$— независимые случайные векторы такие, что $\mathsf{P}\{\xi_i(t) = j\} = p_{ij}, \quad j = 1, \ldots, N, \quad \sum_{j=1}^{N} p_{ij} = 1.$ Показать, что рекуррентное соотношение

$$X(t+1) = \xi_{X(t)}(t+1)$$

и соответствующее начальное условие определяют марковский процесс с состояниями $1, 2, \ldots, N$ и матрицей переходных вероятностей $((p_{ij}))$.

Другие примеры будут рассмотрены ниже.

Однако, ограничивая рассмотрение случаем независимых векторов $\xi(t)$, принимающих значения из конечномерного евклидова пространства, мы искусственно сузим класс возможных марковских процессов, ими порождаемых. Например, уже цепь Маркова со счетным числом состояний не может быть в общем случае описана таким путем.

Если же вместо независимых конечномерных случайных векторов $\xi(t)$ рассмотреть независимые случайные элементы произвольной природы, то мы получим достаточное для всех приложений обобщение теоремы 3.1. Формально такое обобщение опирается на следующую конструкцию.

Пусть $\Phi(t, x, \omega)$, $t = 0, 1, 2, \ldots, x \in E_l$,— множество векторных случайных величин, заданных на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathsf{P})$, удовлетворяющих следующим *условиям* (A).

А.1. Функция $\Phi(t, x, \omega)$, принимающая значения из E_l, $\mathfrak{B}_l \times \mathfrak{A}$-измерима при каждом $t = 0, 1, 2, \ldots$

А.2. В Ω выделено семейство σ-алгебр событий $\mathscr{F}_t$ $(t = 0, 1, 2, \ldots)$ таких, что $\mathscr{F}_s \subset \mathscr{F}_t$ при $s < t$ (монотонное семейство σ-алгебр).

А.3. Семейство векторов $\Phi(t, x, \omega)$ $\mathscr{F}_t$-измеримо и не зависит от $\mathscr{F}_{t-1}$.

Рассмотрим рекуррентную процедуру

$$X(t+1) = \Phi(t+1, X(t), \omega), \qquad t \geqslant s \geqslant 0, \quad (3.4)$$

при начальном условии $X(s)$, измеримом относительно $\mathscr{F}_s$. Соотношение (3.4) и начальное условие $X(s)$ определяют случайный процесс $X^{s, X(s)}(t)$. Почти дословное повторение доказательства теоремы 3.1 позволяет получить следующее утверждение.

Теорема 3.2. *Если выполнены условия* (А), *то процесс* $X^{s, X(s)}(t)$, *определяемый рекуррентной формулой* (3.4) *и начальным условием* $X(s)$, *измеримым относительно σ-алгебры* $\mathscr{F}_s$, *является марковским. Его переходная функция за один шаг вычисляется по формуле*

$$P(u, x, u+1, \Gamma) = \mathsf{P}\{\Phi(u+1, x, \omega) \in \Gamma\}.$$

Можно показать, что для любой переходной функции $P(s, x, t, \Gamma)$ существует $\mathfrak{B}_l \times \mathfrak{A}$-измеримая функция $\Phi(t, x, \omega)$ такая, что построенный согласно (3.4) марковский процесс будет иметь эту переходную функцию. Мы не будем на этом останавливаться. Заметим лишь, что довольно абстрактная конструкция (3.4) часто может быть заменена более простой для понимания формулой (3.1).

Докажем в заключение этого параграфа одно вспомогательное утверждение.

Лемма 3.1. *Пусть процесс* $X(t)$ *марковский, а* $V(t, X(t))$ *имеет конечное математическое ожидание при* $t = s, s+1, \ldots$ *Тогда*

$$\mathsf{M}V(t+1, X(t+1)) - \mathsf{M}V(t, X(t)) = \mathsf{M}LV(t, X(u), \quad (3.5)$$

$$\mathsf{M}V(t+1, X(t+1)) - \mathsf{M}V(s, X(s)) = \sum_{u=s}^{t} \mathsf{M}LV(u, X(u)). \quad (3.6)$$

Доказательство. Применяя формулу (1.6),

получим:

$$\mathsf{M}\,(V\,(t+1,\ X\,(t+1))/X\,(t)) = \\ = \int V\,(t+1,\ z)\,P\,(t,\ X\,(t),\ t+1,\ dz) \quad (\text{п. н.}). \qquad (3.7)$$

Из (3.7) и определения оператора L вытекает равенство

$$\mathsf{M}\,[V\,(t+1,\ X\,(t+1)) - V\,(t,\ X\,(t))/X\,(t)] = \\ = \int [V\,(t+1,\ z) - V\,(t,\ X\,(t)]\,P\,(t,\ X\,(t),\ t+1,\ dz) = \\ = LV\,(t,\ X\,(t)). \quad (3.8)$$

Беря математическое ожидание от обеих частей (3.8), придем к (3.5). Формула же (3.6) является очевидным следствием (3.5).

Задача 3.2. Пусть функция $\Phi\,(t,\ x,\ \omega)$ удовлетворяет при некотором $n \geqslant 1$ условию

$$\mathsf{M}\ |\ \Phi\,(t,\ x,\ \omega)\ |^n \leqslant K\,(t)\,(1 + |\ x\ |^n) < \infty,$$

а $\mathsf{M}\ |\ X\,(s)\ |^n < \infty$. Покажите, что процесс $X\,(t)$, определяемый соотношением (3.4) и начальным условием $X\,(s)$, при всех $t \geqslant s$ имеет конечные моменты порядка n.

§ 4. Дискретная модель диффузии

Важным для дальнейшего примером марковского процесса, построенного по последовательности независимых случайных величин, является процесс, определенный формулами:

$$X\,(t+h) - X\,(t) = b\,(t,\ X\,(t))\,h + \\ + \sigma\,(t,\ X\,(t))\,\xi_h\,(t+h),\quad X\,(s) = x, \\ t = s,\ s+h,\ s+2h,\ \ldots,\ h > 0. \quad (4.1)$$

Предположим, что скалярные функции $b\,(t,\ x)$, $\sigma\,(t,\ x)$ и случайные величины $\xi_h\,(t)$ удовлетворяют следующим условиям:

а) функции $b\,(t,\ x)$, $\sigma\,(t,\ x)$ для каждого фиксированного t измеримы по Борелю, б) случайные величины $\xi_h(s+h)$, $\xi_h(s+2h)$, ... независимы в совокупности для любого $h>0$, причем

$$\mathsf{M}\xi_h(t)=0, \quad \mathsf{M}\xi_h^2(t)=h.$$

При выполнении этих условий (как это вытекает из теоремы 3.1 и замечания, сделанного в конце § 1) процесс, определяемый соотношениями (4.1), будет марковским.

Для дальнейшего нам понадобится также условие

в) функции $|b(t, x)|$, $|\sigma(t, x)|$ растут при $|x|\to\infty$ не быстрее линейных, т. е.

$$|b(t, x)|+|\sigma(t, x)|\leqslant K(t)(1+|x|). \tag{4.2}$$

Задача 4.1. Доказать, что: 1) в условиях а) — в) случайные величины $X(t)$, $t=s, s+h, \ldots$, имеют второй момент; 2) если к тому же $\mathsf{M}\xi^{2n}(u)<\infty$ при $u=s, s+1, \ldots, t$, то существует и $\mathsf{M}|X(u)|^{2n}$ при тех же значениях u.

Выясним вероятностный смысл коэффициентов $b(t, x)$, $\sigma(t, x)$ в (4.1). Учитывая независимость случайных величин $X(t)$, $\xi_h(t+h)$ и свойства условного математического ожидания, имеем:

$$\mathsf{M}(X(t+h)-X(t)/X(t))=b(t, X(t))h, \tag{4.3}$$

$$\mathsf{M}([X(t+h)-X(t)-b(t, X(t))h]^2/X(t)) = \sigma^2(t, X(t))h. \tag{4.4}$$

Процесс $X(t)$ можно рассматривать как простейшую модель явления диффузии. Из формул (4.3), (4.4) вытекает, что средняя скорость движения диффундирующей частицы в точке (t, x) равна $b(t, x)$, а соответствующее отклонение за один шаг имеет дисперсию $\sigma^2(t, x)h$. Коэффициент $b(t, x)$ называют коэффициентом сноса, а $\sigma(t, x)$ — коэффициентом диффузии.

Задача 4.2. Показать, что процесс (4.1) образует супермартингал, если $b(t, x)\leqslant 0$, и мартингал, если $b(t, x)\equiv 0$.

Более широкую возможность формирования супермартингалов из процессов, определяемых посредством (4.1), доставляет теорема 2.1.

Задача 4.3. Доказать, что

$$L_h x = b(t, x),$$

$$L_h x^2 = 2b(t, x)x + b^2(t, x)h + \sigma^2(t, x),$$

где L_h — производящий оператор процесса (4.1), определенный на стр. 43.

§ 5. Выход траекторий из области

Для многих рассмотренных ниже задач важно знать условия, при которых марковский процесс $X(t) = X(t, \omega)$, $t \geqslant 0$, с некоторым начальным распределением выходит с вероятностью 1 из открытой области G пространства E_l за конечное время. Такие условия, как показывает следующая теорема, удобно формулировать в терминах введенного в § 1 оператора L, который строится по переходной функции процесса $X(t)$.

Всюду в этом параграфе $X(t)$ — марковский процесс с производящим оператором L и произвольным начальным распределением.

Теорема 5.1. *Пусть существует неотрицательная функция $V(t, x)$ в области $t \geqslant 0$, $x \in G$, для которой $LV(t, x) \leqslant -\alpha(t)$ в этой области, где $\alpha(t)$ — последовательность, удовлетворяющая условию*

$$\alpha(t) > 0, \qquad \sum_{t=0}^{\infty} \alpha(t) = \infty. \tag{5.1}$$

Тогда процесс $X(t)$ выходит из G за конечное время с вероятностью 1.

Доказательство. Пусть $x \in G$ произвольно. Ясно, что достаточно доказать теорему для процесса $X(t)$ такого, что $X(0) = x$. Обозначим момент первого выхода траекторий процесса $X(t)$ из области G через τ. Положим также

$$W(t, x) = V(t, x) + \beta(t), \tag{5.2}$$

где

$$\beta(t) = \sum_{u=0}^{t-1} \alpha(u).$$

Очевидно, в силу (5.1),

$$\lim_{t\to\infty} \beta(t) = \infty. \tag{5.3}$$

Кроме того,

$$LW(t, x) = LV(t, x) + L\beta(t) = LV(t, x) + \alpha(t) \leqslant 0$$

при $t \geqslant 0$, $x \in G$. Поэтому согласно теореме 2.1 пара $(W(\tau \wedge t, X(\tau \wedge t)), \mathscr{N}_t)$, $t \geqslant 0$, — супермартингал, и следовательно, по теореме 1.5.1, существует с вероятностью 1 конечный предел

$$\lim_{t\to\infty} W(\tau \wedge t, \quad X(\tau \wedge t)) = \eta < \infty. \tag{5.4}$$

Так как $V(t, x)$ неотрицательна, то из (5.2), (5.4) вытекает, что и $\lim\limits_{t\to\infty} \beta(\tau \wedge t)$ существует и конечен с вероятностью 1. Отсюда, учитывая (5.3), убеждаемся в ограниченности п. н. по t случайной величины $\tau \wedge t$. Последнее эквивалентно утверждению теоремы.

Простое следствие этой теоремы читатель получит, решив следующую задачу.

Задача 5.1. Пусть B — некоторое множество из E_l, $U_\varepsilon(B)$ — его ε-окрестность [1]), а $V_\varepsilon(B) = E_l \setminus U_\varepsilon(B)$. Предположим, что существует неотрицательная функция $V(t, x) \in D_L$ в области $t \geqslant 0$, $x \in E_l$, для которой

$$LV(t, x) \leqslant -\alpha(t)\varphi(t, x), \qquad t \geqslant 0,\ x \in E_l, \tag{5.5}$$

причем последовательность $\alpha(t)$ удовлетворяет условиям (5.1), а $\varphi(t, x)$ — условию

$$\inf_{t\geqslant Q,\ x\in V_\varepsilon(B)} \varphi(t, x) > 0 \tag{5.6}$$

при всех $\varepsilon > 0$ и некотором $Q = Q(\varepsilon)$. Доказать, что в этом случае

$$\mathsf{P}\{\varliminf_{t\to\infty} \rho(X(t), B) = 0\} = 1.$$

В последующих приложениях нежелательно исключать случаи, когда условие (5.5) выполнено с функцией $\varphi(t, x)$, стремящейся к нулю при $|x| \to \infty$. Поэтому нам

---

[1]) Здесь и далее расстояние $\rho(x, B)$ от точки x до множества B определяется формулой $\rho(x, B) = \inf\limits_{y\in B} \rho(x, y)$, а $U_\varepsilon(B) = \{x\colon \rho(x, B) < \varepsilon\}$. Будем также писать $x \to B$, если $\rho(x, B) \to 0$.

потребуется некоторое уточнение последнего утверждения.

Введем сначала некоторые обозначения, которые понадобятся нам также и в случае непрерывного времени (см. гл. 3).

Обозначим $U_{\varepsilon, R}(B) = V_\varepsilon(B) \cap \{x: |x| < R\}$. Отнесем функцию $\varphi(t, x)$ к классу $\Phi(B)$, $\varphi \in \Phi(B)$, если она неотрицательна и при всех $R > \varepsilon > 0$ для некоторого $Q = Q(\varepsilon, R)$

$$\inf_{t \geqslant Q,\ x \in U_{\varepsilon, R}(B)} \varphi(t, x) > 0.$$

Теорема 5.2. *Пусть существует функция $V(t, x) \geqslant 0$ и множество $B \subset E_l$, для которых*

$$\inf_{t \geqslant 0} V(t, x) \to \infty \text{ при } |x| \to \infty, \tag{5.7}$$

$$LV(t, x) \leqslant -\alpha(t)\varphi(t, x), \ t \geqslant 0, \ x \in E_l,$$
$$\varphi(t, x) \in \Phi(B), \tag{5.8}$$

причем последовательность $\alpha(t)$ удовлетворяет условиям (5.1). *Тогда*

$$\mathsf{P}\{\sup_{t \geqslant 0} |X(t)| = R(\omega) < \infty\} = 1, \tag{5.9}$$

$$\mathsf{P}\left\{\sum_{u=0}^{\infty} \alpha(u)\varphi(u, X(u)) < \infty\right\} = 1, \tag{5.10}$$

$$\mathsf{P}\{\varliminf_{t \to \infty} \rho(X(t), B) = 0\} = 1. \tag{5.11}$$

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай, когда $X(0) = x$, где x — произвольная точка из E_l. В условиях теоремы $(V(t, X(t)), \mathscr{N}_t)$ — неотрицательный супермартингал [1]). Поэтому с вероятностью 1 существует конечный предел последовательности $V(t, X(t))$ при $t \to \infty$ (см. теоремы 2.1 и 1.5.1). Отсюда и из (5.7) вытекает (5.9). Далее, из формул (3.6) и (5.8) следует при любом $t \geqslant 0$ неравенство

$$\mathsf{M}\sum_{u=0}^{t} \alpha(u)\varphi(u, X(u)) \leqslant V(0, x),$$

и значит, соотношение (5.10) также выполнено. Сопостав-

[1]) Напомним, что $\mathscr{N}_t$ — σ-алгебра событий, порожденная течением процесса $X(u)$ до момента t.

ляя (5.10) и (5.1), убеждаемся, что найдется последовательность $\tau_n = \tau_n(\omega)$, для которой $\varphi(\tau_n, X(\tau_n))$ сходится п. н. к нулю при $n \to \infty$. Поэтому, используя (5.9) и условие $\varphi \in \Phi(B)$, убеждаемся в справедливости и последнего утверждения теоремы.

Замечание 5.1. Входящее в теорему 5.2 условие существования функции $V(t, x) \geqslant 0$, удовлетворяющей соотношениям (5.7), (5.8), выполнено, если имеет место следующее, более просто проверяемое условие: существует функция $U(t, x) \geqslant 0$, для которой

$$\inf_{t \geqslant 0} U(t, x) \to \infty \text{ при } |x| \to \infty,$$

$$LU(t, x) \leqslant g(t)[1 + U(t, x)] - \alpha(t)\varphi(t, x),$$

$$\varphi \in \Phi(B), \tag{5.12}$$

где

$$g(t) > 0, \qquad \sum_{t=0}^{\infty} g(t) < \infty. \tag{5.13}$$

В самом деле, в этом случае в качестве $V(t, x)$ можно взять функцию

$$V(t, x) = (1 + U(t, x)) \prod_{u=t}^{\infty} (1 + g(u)), \tag{5.14}$$

поскольку[1]), в силу (5.12),

$$LV(t, x) = [1 + LU(t, x) + U(t, x)] \prod_{u=t+1}^{\infty} (1 + g(u)) -$$
$$- [1 + U(t, x)] \prod_{u=t}^{\infty} (1 + g(u)) \leqslant$$
$$\leqslant -\alpha(t)\varphi(t, x) \prod_{u=t+1}^{\infty} (1 + g(u)) \leqslant -\alpha(t)\varphi(t, x).$$

§ 6. Ряды из независимых случайных величин

В качестве примера, иллюстрирующего приложение теорем 2.1 и 5.1 к классическим задачам теории вероятностей, докажем два утверждения о сходимости п. н. ряда

[1]) Бесконечное произведение в (5.14) сходится в силу (5.13).

из независимых случайных величин, принадлежащие А. Н. Колмогорову [1].

Всюду в этом параграфе будем предполагать, что $\xi(t)$, $t = 1, 2, \ldots,$ — последовательность независимых в совокупности случайных величин с нулевым математическим ожиданием и конечной дисперсией $\sigma_t^2 = \mathsf{M}\xi^2(t)$. Обозначим через $X(t) = \sum_{s=1}^{t} \xi(s)$, $t \geqslant 1$, последовательность частичных сумм ряда $\sum_{s=1}^{\infty} \xi(s)$. Процесс $X(t)$ является марковским (см. § 3), поскольку

$$X(t+1) = X(t) + \xi(t+1). \tag{6.1}$$

Очевидно, в обозначениях § 3,

$$X^{t,x}(t+1) = x + \xi(t+1). \tag{6.2}$$

Теорема 6.1. *Если* $\sum_{s=1}^{\infty} \sigma_s^2 < \infty$, *то ряд* $\sum_{s=1}^{\infty} \xi(s)$ *сходится с вероятностью 1.*

Доказательство. Положим

$$V(t, x) = x^2 + \sum_{s=t+1}^{\infty} \sigma_s^2.$$

Тогда

$$LV(t, x) = \mathsf{M}V(t+1, X^{t,x}(t+1)) - V(t, x) =$$
$$= \mathsf{M}(x + \xi(t+1))^2 - x^2 - \sigma_{t+1}^2 =$$
$$= x^2 + 2x\mathsf{M}\xi(t+1) + \mathsf{M}\xi^2(t+1) - x^2 - \sigma_{t+1}^2 = 0,$$

т. е. (см. теорему 2.1) $(V(t, X(t)), \mathscr{N}_t)$ — мартингал. По теореме 1.5.1 с вероятностью 1 существует конечный предел

$$\lim_{t\to\infty} \Big[X^2(t) + \sum_{s=t+1}^{\infty} \sigma_s^2\Big] = \lim_{t\to\infty} X^2(t) < \infty. \tag{6.3}$$

Кроме того,

$$\mathsf{M} \sum_{t=0}^{\infty} [X(t+1) - X(t)]^2 = \mathsf{M} \sum_{t=1}^{\infty} \xi^2(t) = \sum_{t=1}^{\infty} \sigma_t^2 < \infty$$

и, значит,

$$\sum_{t=0}^{\infty} [X(t+1)-X(t)]^2 < \infty \quad (\text{п. н.}).$$

Поэтому общий член последнего ряда стремится к нулю:

$$\lim_{t\to\infty} [X(t+1)-X(t)] = 0 \quad (\text{п. н.}). \tag{6.4}$$

Из (6.3), (6.4) вытекает, что и последовательность $X(t)$ имеет с вероятностью 1 конечный предел, т. е. ряд $\sum\limits_{s=1}^{\infty} \xi(s)$ сходится п. н. Теорема доказана.

Согласно теореме 6.1 сходимость ряда из дисперсий независимых случайных величин $\xi(t)$ с нулевым математическим ожиданием влечет сходимость с вероятностью 1 ряда из самих случайных величин. Следующая теорема показывает, что для ограниченных случайных величин верно и обратное утверждение.

Теорема 6.2. *Пусть $|\xi(t)|$ ограничены с вероятностью 1 некоторой постоянной C (одной и той же для всех t). Тогда, если $\sum\limits_{s=1}^{\infty} \sigma_s^2 = \infty$, то*

$$\mathsf{P}\left\{\overline{\lim_{t\to\infty}}\left|\sum_{s=1}^{t} \xi(s)\right| = \infty\right\} = 1. \tag{6.5}$$

Доказательство. Рассмотрим, как и в теореме 6.1, последовательность $X(t) = \sum\limits_{s=1}^{t} \xi(s)$ частичных сумм ряда $\sum\limits_{s=1}^{\infty} \xi(s)$. Для доказательства (6.5) достаточно показать, что марковский процесс $X^{t,x}(t)$ выходит за конечное время из любого достаточно большого интервала $(-K, K)$. Пусть K — произвольное положительное число, большее C. Тогда, в силу (6.2),

$$|X^{t,x}(t+1)| < 2K \quad (\text{п. н.}) \tag{6.6}$$

для любой точки $x \in [-K, K]$.

Положим

$$V(x) = \begin{cases} 4K^2 - x^2, & \text{если } |x| < 2K, \\ 0, & \text{если } |x| \geqslant 2K. \end{cases}$$

Принимая во внимание (6.6), имеем при $x \in [-K, K]$

$$LV = \mathsf{M}V(X^{t,x}(t+1)) - V(x) =$$
$$= 4K^2 - \mathsf{M}(x + \xi(t+1))^2 - 4K^2 + x^2 = -\sigma_{t+1}^2.$$

Поскольку же ряд из дисперсий σ_t^2 расходится по условию, а функция $V(x)$ неотрицательна, то согласно теореме 5.1 процесс $X(t)$ выходит из области $x \in (-K, K)$ за конечное время п. н. Теорема доказана.

Задача 6.1. Доказать, что траектория процесса $X(t)$, определенного соотношением (4.1), с вероятностью 1 выходит из области $r_1 < x < r_2$, если $b(t, x) > k > 0$ (или $b(t, x) < k < 0$), $\sigma^2(t, x) < \sigma_0^2$ при $t > 0$, $x \in (r_1, r_2)$, а случайные величины $\xi_h(t)$ ограничены некоторой постоянной C почти наверное.

Указание. Воспользоваться способом доказательства последней теоремы и результатом задачи 4.3.

§ 7. Сходимость траекторий

Из задачи 5.1 и теоремы 5.2 следует, что при определенных условиях траектории марковского процесса $X(t)$, $t \geqslant 0$, сходятся к множеству B по некоторой, вообще говоря, случайной последовательности моментов времени. Здесь мы приведем условия, при которых можно гарантировать справедливость более сильного утверждения: $X(t) \to B$ при $t \to \infty$ (п. н.).

Для произвольной функции $W(t, x)$, $t \geqslant 0$, $x \in E_l$, положим

$$\overline{W}(x) = \sup_{t \geqslant 0} W(t, x), \qquad \underset{\sim}{W}(x) = \inf_{t \geqslant 0} W(t, x). \tag{7.1}$$

Теорема 7.1. *Пусть существует неотрицательная функция $V(t, x) \in D_L$ в области $t \geqslant 0$, $x \in E_l$ и множество B, для которых*

$$\lim_{|x| \to \infty} \underset{\sim}{V}(x) = \infty, \tag{7.2}$$

$$LV(t, x) \leqslant g(t)[1 + V(t, x)] - \alpha(t)\varphi(t, x),$$
$$\varphi(t, x) \in \Phi(B). \tag{7.3}$$

Пусть, далее, функции $\alpha(t)$ и $g(t)$ удовлетворяют усло-

виям (5.1), (5.13),

$$\inf_{x \in U_{\varepsilon, R}(B)} \tilde{V}(x) > 0 \quad \textit{для любых} \quad R > \varepsilon > 0, \tag{7.4}$$

$V(t, x) \equiv 0$ *при* $x \in B$ *и, более того,*

$$\lim_{x \to B} \tilde{V}(x) = 0. \tag{7.5}$$

Тогда марковский процесс $X(t)$ с производящим оператором L и произвольным начальным распределением сходится п. н. к множеству B при $t \to \infty$. Кроме того,

$$\lim_{t \to \infty} \mathsf{M}[V(t, X(t))]^{\alpha} = 0$$

для любого положительного $\alpha < 1$, если $\mathsf{M}V(0, X(0)) < \infty$.

Доказательство. Первое утверждение теоремы достаточно доказать для процесса $X(t)$ с произвольным детерминированным начальным условием $X(0) = x$. Положим

$$W(t, x) = (1 + V(t, x)) \prod_{u=t}^{\infty} (1 + g(u)).$$

Тогда (см. замечание 5.1) $LW(t, x) \leqslant -\alpha(t)\varphi(t, x) \leqslant 0$ и, значит, $(W(t, X(t)), \mathcal{N}_t)$ — неотрицательный супермартингал. Поэтому процесс $W(t, X(t))$, а следовательно, и процесс $V(t, X(t))$ имеет п. н. конечный предел при $t \to \infty$. При этом в силу (5.11) и (7.5)

$$\mathsf{P}\{\lim_{t \to \infty} V(t, X(t)) = 0\} = 1.$$

Первое утверждение теоремы вытекает теперь из (7.4). Второе утверждение является следствием леммы 1.2.1, поскольку последовательность $\mathsf{M}V(t, X(t))$ ограничена.

Замечание 7.1. Доказанная теорема остается, очевидно, справедливой, если условие положительности $\alpha(t)$ заменить условием $\alpha(t) > 0$, начиная с некоторого момента $t = t_0$.

Марковские процессы, возникающие в процедурах стохастической аппроксимации (см. гл. 4), часто могут быть записаны в виде

$$\begin{gathered} X(t+1) - X(t) = \alpha(t) F(t, X(t)) + \\ + G(t+1, X(t), \omega) = \Phi(t+1, X(t), \omega), \quad (7.6) \\ t = s, s+1, s+2, \ldots, \quad X(s) = x, \end{gathered}$$

где $s \geqslant 0$, $x \in E_l$; $F(t, x) = F(x) + q(t, x)$, $G(t, x, \omega)$ — векторы из E_l, функция $\Phi(t, x, \omega)$ удовлетворяет условиям (А) § 3, причем $\mathsf{M}G(t, x, \omega) \equiv 0$, а $\alpha(t)$ — некоторая последовательность положительных чисел.

Сформулируем для процесса (7.6) простое следствие из теоремы 7.1 в одномерном случае.

Теорема 7.2. *Пусть функции $F(t, x)$ и $G(t, x, \omega)$ со значениями в E_1 таковы, что $F(x_0) = 0$,*

$$\sup_{\varepsilon < |x - x_0| < 1/\varepsilon} [F(x)(x - x_0)] < 0 \text{ при любом } \varepsilon > 0, \tag{7.7}$$

$$G(t+1, x, \omega) = \beta(t) G_1(t, x, \omega),$$

$$F^2(x) + \mathsf{M}G_1^2(t, x, \omega) \leqslant K_1(1 + x^2), \tag{7.8}$$

(здесь и ниже K_i — положительные постоянные),

$$\begin{gathered} \alpha(t) > 0, \quad \sum_{t=0}^{\infty} \alpha(t) = \infty, \quad \beta(t) > 0, \\ \sum_{t=0}^{\infty} \beta^2(t) < \infty, \qquad \sum_{t=0}^{\infty} \alpha(t)\gamma(t) < \infty, \end{gathered} \tag{7.9}$$

где $\gamma(t) = \sup\limits_{x \in E_1} |q(t, x)|$,

$$\frac{\alpha(t)}{\beta(t)} < K_1. \tag{7.10}$$

Тогда процесс $X^{s, x}(t)$, определяемый с помощью (7.6), сходится к x_0 п. н. при $t \to \infty$ для всех $s \geqslant 0$, $x \in E_1$.

Действительно, считая для простоты $x_0 = 0$ (это, очевидно, не ограничивает общности), попытаемся найти функцию $V(t, x)$, удовлетворяющую условиям теоремы 7.1, понимая под B множество, состоящее из одной точки $x = 0$. Положим

$$V(t, x) = x^2.$$

Воспользовавшись формулой (1.7), учитывая соотношение (7.10) и равенство $\mathsf{M}G_1(t, x, \omega) \equiv 0$, получим:

$$\begin{aligned} Lx^2 = \mathsf{M}(x + \alpha(t) F(t, x) + \beta(t) G_1(t, x, \omega))^2 - x^2 = \\ = 2\alpha(t) F(t, x) x + \alpha^2(t) F^2(t, x) + \\ + \beta^2(t) \mathsf{M}G_1^2(t, x, \omega) \leqslant 2\alpha(t) F(x) x + \\ + 2\alpha(t)\gamma(t)|x| + K_2[\beta^2(t) F^2(x) + \\ + \beta^2(t) \mathsf{M}G_1^2(t, x, \omega) + \alpha^2(t)\gamma^2(t)]. \end{aligned}$$

Значит, в силу (7.7), (7.8) и неравенства $|x| < 1 + x^2$,

$$Lx^2 \leqslant -2\alpha(t)\,|F(x)\,x| + g(t)(1 + x^2),$$

где $g(t) = K_3(\beta^2(t) + \alpha(t)\gamma(t) + \alpha^2(t)\gamma^2(t))$.

Таким образом, согласно (7.9), функция $V(t, x) = x^2$ удовлетворяет условиям теоремы 7.1, если $B = \{0\}$. Тем самым наше утверждение доказано.

Естественно исследовать поведение траекторий процесса $X^{s,x}(t)$ и без предположения о том, что множество $B = \{x\colon F(x) = 0\}$ состоит из одной точки. Нетрудно понять, что теорема 7.2 остается в силе и в случае, когда

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad x \in [a, b], \\ >0, & \text{если} \quad x < a, \\ <0, & \text{если} \quad x > b. \end{cases}$$

При этом будет справедливо соотношение $X(t) \to [a, b]$ п. н. при $t \to \infty$.

К сожалению, теорему 7.1 нельзя, вообще говоря, применить в ситуации, когда множество $B = \{x\colon F(x) = 0\}$ многосвязно (мы подробнее остановимся на этом ниже, см. стр. 135). Поэтому сейчас будет доказана другая теорема о сходимости, специально приспособленная к этой ситуации. Для простоты мы ограничимся марковскими процессами, которые определяются соотношениями типа (7.6), имея в виду последующие приложения к процедурам стохастической аппроксимации.

Теорема 7.3. *Пусть процесс* $X^{s,x}(t) = X^{s,x}(t, \omega)$ *задан рекуррентно формулами* (7.6) *и множество* $B = \{x\colon F(x) = 0\}$ *состоит из конечного числа связных компонент* B_i. *Пусть, далее, множество* B, *последовательность* $\alpha(t)$ *и некоторая функция* $V(t, x)$ (*или* $U(t, x)$) *удовлетворяют условиям теоремы* 5.2 (*или замечания* 5.1 *к ней*), *причем*

$$\sum_{t=0}^{\infty} \alpha(t)\gamma(t) < \infty, \qquad \gamma(t) = \sup_{x \in E_1} |q(t, x)|,$$

$$\sup_{t \geqslant 0,\ |x| \leqslant r} |F(t, x)| = \widetilde{F}(r) < \infty, \tag{7.11}$$

$$\mathsf{M}G(t, x, \omega) \equiv 0, \tag{7.12}$$

$$K = \sum_{t=s}^{\infty} \mathsf{M}\,|G(t+1, X^{s,x}(t), \omega)|^2 < \infty. \tag{7.13}$$

Тогда $X^{s,x}(t)$ *с вероятностью* 1 *сходится либо к одной из точек множества* B, *либо к границе одной из его связных компонент* [1]) *для любых* $s \geqslant 0$, $x \in E_l$.

Доказательство. Положим

$$Y(t) = \sum_{u=s}^{t} G(u+1, X^{s,x}(u), \omega).$$

Очевидно,

$$\mathsf{M}\,|Y(t)|^2 = \sum_{u=s}^{t} \mathsf{M}\,|G(u+1, X^{s,x}(u), \omega)|^2 +$$
$$+2 \sum_{\substack{s \leqslant u_1 < u_2 \\ u_2 \leqslant t}} \mathsf{M}\,(G(u_1+1, X^{s,x}(u_1), \omega), G(u_2+1, X^{s,x}(u_2), \omega)).$$

Вычислим математическое ожидание скалярного произведения в правой части этого равенства. Учитывая условие (7.12) и независимость $X^{s,x}(u)$, $G(u+1, x, \omega)$, получим (см. задачу 1.4.1, а))

$$\mathsf{M}\,(G(u_1+1, X^{s,x}(u_1), \omega), G(u_2+1, X^{s,x}(u_2), \omega)) =$$
$$= \mathsf{M}\mathsf{M}\,((G(u_1+1, X^{s,x}(u_1), \omega), G(u_2+1, X^{s,x}(u_2), \omega))/\mathcal{N}_{u_2}) =$$
$$= \mathsf{M}(G(u_1+1, X^{s,x}(u_1), \omega), \mathsf{M}(G(u_2+1, X^{s,x}(u_2), \omega)/X^{s,x}(u_2))) =$$
$$= \mathsf{M}\,[(G(u_1+1, X^{s,x}(u_1), \omega), \mathsf{M}G(u_2+1, y, \omega))]_{y=X^{s,x}(u_2)} = 0.$$

Отсюда в силу (7.13) имеем:

$$\mathsf{M}\,|Y(t)|^2 = \sum_{u=s}^{t} \mathsf{M}\,|G(u+1, X^{s,x}(u), \omega)|^2 \leqslant K. \qquad (7.14)$$

Так как $X^{s,x}(t)$ — марковский процесс и выполнено условие (7.12), то последовательность $Y(t)$ образует мартингал. Поэтому из (7.14) вытекает, согласно теореме 1.5.1′, соотношение

$$\lim_{t\to\infty} Y(t) = Y(\infty) < \infty. \text{ (п. н.)} \qquad (7.15)$$

Дальнейшее доказательство разобьем на несколько частей. Сначала установим равенство

$$\mathsf{P}\{\bigcup_{i} \{\lim_{t\to\infty} \rho(X^{s,x}(t), B_i) = 0\}\} = 1.$$

---

[1]) Последняя возможность на самом деле может иметь место. Соответствующий пример удобнее строить в случае непрерывного времени, см. стр. 104.

Далее покажем, что с вероятностью 1 траектории процесса $X^{s,x}(t)$ не могут бесконечно много раз совершать «экскурсии» от границы внутрь множества B на конечное расстояние и обратно. И, наконец, установим, что для множества траекторий, остающихся в B, начиная с некоторого момента времени (быть может, случайного), существует при $t \to \infty$ предел $X^{s,x}(t)$. Очевидно, из этих фактов, к установлению которых мы сейчас и переходим, вытекает утверждение теоремы.

1) Из (5.11) следует, что найдутся такие множества $\Omega_i \in \mathfrak{A}$, для которых $\mathsf{P}\{\bigcup \Omega_i\} = 1$, причем

$$\varliminf_{t\to\infty} \rho(X^{s,x}(t), B_i) = 0 \quad \text{при} \quad \omega \in \Omega_i. \tag{7.16}$$

При этом можно считать для всех $\omega \in \bigcup \Omega_i$ выполненными соотношения (5.9), (5.10), (7.15).

Пусть i фиксировано. Обозначим через B_ε ε-окрестность множества B_i, $B_{\varepsilon\varepsilon}$ — ε-окрестность множества B_ε. Предположим, что для некоторого $\omega \in \Omega_i$

$$\varlimsup_{t\to\infty} \rho(X^{s,x}(t), B_i) > \varliminf_{t\to\infty} \rho(X^{s,x}(t), B_i).$$

Тогда найдутся такие последовательности моментов времени $t_n' = t_n'(\omega)$, $t_n'' = t_n''(\omega)$, $t_{n+1}' > t_n'' > t_n'$, $n = 1, 2, \ldots$, и такое достаточно малое $\varepsilon = \varepsilon(\omega)$, для которых $X^{s,x}(t_n') \in B_\varepsilon$, $X^{s,x}(t_n'') \overline{\in} B_{\varepsilon\varepsilon}$, $X^{s,x}(t) \overline{\in} B_\varepsilon$ при $t_{n+1}' > t \geqslant t_n''$. Поэтому из равенства

$$X^{s,x}(t_{n+1}') - X^{s,x}(t_n'') =$$
$$= \sum_{u=t_n''}^{t_{n+1}'-1} \alpha(u) F(u, X^{s,x}(u)) + \sum_{u=t_n''}^{t_{n+1}'-1} G(u+1, X^{s,x}(u), \omega)$$

будет вытекать, что

$$\varepsilon \leqslant |X^{s,x}(t_{n+1}') - X^{s,x}(t_n'')| \leqslant$$
$$\leqslant \tilde{F}(R(\omega)) \sum_{u=t_n''}^{t_{n+1}'-1} \alpha(u) + \left| \sum_{u=t_n''}^{t_{n+1}'-1} G(u+1, X^{s,x}(u), \omega) \right|.$$

Это неравенство вместе с (7.15) приводит к соотношению

$$\sum_{u=t_n''}^{t_{n+1}'-1} \alpha(u) > \frac{\varepsilon}{2\tilde{F}(R(\omega))} \quad \text{при} \quad n > n_1(\omega). \tag{7.17}$$

Далее, в силу условия $\varphi \in \Phi(B)$ и (5.9) найдутся такие $n_2(\omega)$, $\delta(\omega)$, что

$$\inf_{t''_n \leqslant u < t'_{n+1}} \varphi(u, X^{s,x}(u)) = \delta(\omega) > 0 \quad \text{при} \quad n > n_2(\omega).$$

Следовательно, полагая $\bar{n} = \max(n_1, n_2)$, будем иметь с учетом (5.10), (7.17)

$$\infty > \sum_{u=s}^{\infty} \alpha(u)\varphi(u, X^{s,x}(u)) \geqslant$$

$$\geqslant \sum_{n=\bar{n}}^{\infty} \sum_{u=t''_n}^{t'_{n+1}-1} \alpha(u)\varphi(u, X^{s,x}(u)) \geqslant \delta(\omega) \sum_{u=\bar{n}}^{\infty} \sum_{u=t''_n}^{t'_{n+1}-1} \alpha(u) = \infty.$$

Из полученного противоречия и (7.16) имеем

$$\lim_{t\to\infty} \rho(X^{s,x}(t), B_i) = 0 \quad \text{для} \quad \omega \in \Omega_i.$$

2) Обозначим C_ε ε-окрестность множества $E_l \setminus B_l$, $C_{\varepsilon\varepsilon}$ — ε-окрестность C_ε. Предположим, что для некоторого $\omega \in \Omega_i$ найдутся такие последовательности моментов времени $\tau'_n = \tau'_n(\omega)$, $\tau''_n = \tau''_n(\omega)$, $\tau'_{n+1} > \tau''_n > \tau'_n$, $n = 1, 2, \ldots$, и такое $\varepsilon = \varepsilon(\omega) > 0$, для которых $X^{s,x}(\tau'_n) \in C_\varepsilon$, $X^{s,x}(\tau'_n) \overline{\in} C_{\varepsilon\varepsilon}$, $X^{s,x}(t) \in B_i$ при $\tau''_n \geqslant t \geqslant \tau'_n$. Тогда согласно равенствам

$$X^{s,x}(\tau''_n) - X^{s,x}(\tau'_n) =$$

$$= \sum_{u=\tau'_n}^{\tau''_n-1} \alpha(u)[F(X^{s,x}(u)) + q(u, X^{s,x}(u))] +$$

$$+ \sum_{u=\tau'_n}^{\tau''_n-1} G(u+1, X^{s,x}(u), \omega),$$

$$F(X^{s,x}(u)) = 0 \quad \text{при} \quad \tau'_n \leqslant u \leqslant \tau''_n,$$

будем иметь

$$\varepsilon < |X^{s,x}(\tau''_n) - X^{s,x}(\tau'_n)| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{u=\tau'_n}^{\tau''_n-1} \alpha(u)\gamma(u) + \left|\sum_{u=\tau'_n}^{\tau''_n-1} G(u+1, X^{s,x}(u), \omega)\right|.$$

Переходя здесь к пределу при $n \to \infty$, учитывая (7.15) и условие

$$\sum_{u=0}^{\infty} \alpha(u)\gamma(u) < \infty, \tag{7.18}$$

получим $\varepsilon = 0$.

3) Точно так же из (7.15), (7.18) и равенства нулю $F(x)$ при $x \in B$ легко убеждаемся, что если $X^{s,x}(t)$ остается, начиная с некоторого момента времени внутри множества B, то $\lim\limits_{t\to\infty} X^{s,x}(t)$ обязательно существует. Теорема доказана.

Замечание 7.2. Условие (7.13) является малоэффективным. Однако оно выполнено, если, например,

$$\mathsf{M}\,|G(t+1,\, x,\, \omega)|^2 \leqslant g_1(t)\,[1 + V(t,\, x)], \tag{7.19}$$

а ряд $\sum\limits_{t=0}^{\infty} g_1(t)$ сходится. Действительно, так как $(V(t,\, X^{s,x}(t)),\, \mathcal{N}_t)$ — супермартингал, то последовательность $\mathsf{M}V(t,\, X^{s,x}(t))$ ограничена по t. Поэтому, используя независимость $X^{s,x}(u)$, $G(u+1,\, x,\, \omega)$ (см. задачу 1.4.1, б)) и (7.19), находим при любых $t \geqslant s \geqslant 0$

$$\sum_{u=s}^{t} \mathsf{M}\,|G(u+1,\, X^{s,x}(u),\, \omega)|^2 = \sum_{u=s}^{t} \mathsf{M}\,[\mathsf{M}\,|G(u+1,\, y,\, \omega)|^2]_{y=X^{s,x}(u)} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{u=s}^{t} g_1(u)\,[1 + \mathsf{M}V(u,\, X^{s,x}(u))] \leqslant C \sum_{u=s}^{t} g_1(u) \leqslant C \sum_{u=s}^{\infty} g_1(u).$$

Значит, ряд (7.13) сходится.

§ 8. Обучение распознаванию образов

Рассмотрим, следуя АБР [1], гл. V, простейшую постановку задачи об обучении машины распознаванию образов, принадлежащих одному из двух классов. В этой постановке будем считать возможными образами точки некоторого ограниченного подмножества пространства E_l. Предположим, что подмножество состоит из двух непересекающихся компонент A и B, каждую из которых мы будем отождествлять с подлежащими распознаванию классами. Предположим, далее, что через начало координат можно провести $l-1$-мерную плоскость, разделяющую образы (рис. 3). Таким образом, вектор нормали $x^{(0)}$ к этой плоскости можно выбрать так, что $(y, x^{(0)}) > 0$ для $y \in A$, $(y, x^{(0)}) < 0$ для $y \in B$.

Более того, будем считать выполненным несколько более ограничительное условие: для некоторого $\varepsilon > 0$

$$(y, x^{(0)}) > \varepsilon \quad \text{для} \quad y \in A,$$
$$(y, x^{(0)}) < -\varepsilon \quad \text{для} \quad y \in B.$$

Пусть, далее, при предъявлении очередного «образа», т. е. точки из множества $A \cup B$, «учитель» может сообщить, какому из классов принадлежит предъявленная точка. Это означает, что в обучающуюся машину можно ввести величину[1]) sign $(y, x^{(0)})$ для любого предъявленного образа y.

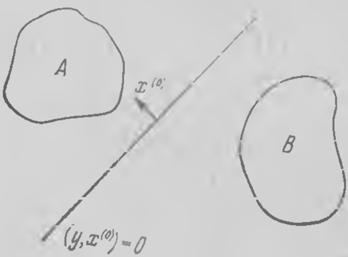

Рис. 3.

Для того чтобы закончить описание модели, осталось сообщить, что образы из множества $A \cup B$ предъявляются независимо, с некоторым неизвестным, вообще говоря, распределением вероятностей $\mathsf{P}(dy)$ таким, что $\mathsf{P}(\overline{A \cup B}) = 0$. Будем обозначать $\eta(t)$, $t = 1, 2, \ldots$ эту предъявляемую последовательность образов из $A \cup B$. Так как множество $A \cup B$ ограничено, то можно считать, что для некоторой неслучайной постоянной K

$$\mathsf{P}\{|\eta(t)| < K\} = 1. \tag{8.1}$$

Задача состоит в том, чтобы, используя сообщаемые учителем данные (т. е. величины sign $(\eta(t), x^{(0)})$, $t = 1, 2, \ldots$), построить последовательность гиперплоскостей, сходящихся к одной из гиперплоскостей, разделяющих классы A и B с вероятностью 1.

Перед решением этой задачи необходимо уточнить, что понимается под гиперплоскостью, разделяющей классы A

[1]) Причем машина «знает», что положительное скалярное произведение соответствует образам класса A, а отрицательное — образам класса B.

и B с вероятностью 1. Заметим, прежде всего, что единственную информацию о классах A и B несет последовательность независимых случайных векторов $\eta(t)$, $t = 1, 2, \ldots$, и образы именно этой последовательности предъявляются для различения «машине» после некоторого первоначального периода обучения.

В свете этого естественно следующее определение, в котором $\tilde{x}$, t_0, вообще говоря, случайны.

Определение. Пусть $\tilde{x}$ — вектор нормали к гиперплоскости Q. Будем говорить, что эта гиперплоскость *разделяет* классы A и B при $t \geqslant t_0$ с вероятностью 1, если

$$\mathsf{P}\{\operatorname{sign}(\tilde{x}, \eta(t)) = \operatorname{sign}(x^0, \eta(t)) \text{ при } t \geqslant t_0\} = 1. \tag{8.2}$$

Резюмируя, мы получим следующую математическую формализацию задачи обучения машины распознаванию образов.

Пусть $\eta(t)$, $t = 1, 2, \ldots$,— последовательность независимых случайных векторов из E_l, удовлетворяющих условию (8.1) и при некоторых $x^{(0)} \in E_l$, $\varepsilon > 0$ условию

$$\mathsf{P}\{|(x^{(0)}, \eta(t))| > \varepsilon\} = 1. \tag{8.3}$$

Предположим, что для каждого t можно наблюдать величину $\xi(t) = \operatorname{sign}(x^{(0)}, \eta(t))$. Вектор $\eta(t)$ относим к классу A, если $(x^{(0)}, \eta(t)) > 0$, и к классу B, если $(x^{(0)}, \eta(t)) < 0$. Требуется по наблюдениям $\xi(t)$, $t = 1, 2, \ldots$, построить вектор $X(t)$ такой, что $X(t) \to \tilde{x}$ (п. н.), причем случайный вектор $\tilde{x}$ для некоторой п. н. конечной случайной величины t_0 удовлетворяет условию (8.2). Решение этой задачи дается следующей теоремой.

Теорема 8.1. *Пусть выполнены условия* (8.1), (8.3). *Тогда марковский процесс $X(t)$, определяемый рекуррентными формулами*

$$X(t+1) - X(t) =$$
$$= \frac{\operatorname{sign}(x^{(0)}, \eta(t+1)) - \operatorname{sign}(X(t), \eta(t+1))}{2}\, \eta(t+1), \quad X(0) = x, \tag{8.4}$$

при произвольном $x \in E_l$ обладает свойствами:

1) *$X(t) \to \tilde{x}$ п. н. при $t \to \infty$, где $\tilde{x}$ — вектор нормали гиперплоскости, разделяющей классы A и B с вероят-*

ностью 1 при $t \geqslant t_0(\omega)$, $t_0(\omega)$ — *конечная с вероятностью 1 случайная величина;*

2) *справедливо равенство* $X(t) \equiv \bar{x}$ *при* $t \geqslant t_0(\omega)$, *так что процесс «обучения» (8.4) заканчивается п. н. за конечное число шагов.*

Доказательство. Заметим прежде всего, что процесс $X(t)$ не изменится, если в (8.4) вместо $x^{(0)}$ положить $cx^{(0)}$, где c — любое положительное число. Поэтому, в силу (8.1), (8.3), не ограничивая общности, можно считать выполненным неравенство

$$2|(x^{(0)}, \eta(t+1))| - |\eta(t+1)|^2 > 1 \text{ п. н.} \tag{8.5}$$

Рассмотрим, далее, функцию

$$V(x) = |x - x^{(0)}|^2.$$

Тогда, обозначая, как всегда через L производящий оператор процесса $X(t)$, находим

$$LV(x) = -2\mathsf{M}\{(x^{(0)} - x, \eta(t+1))\, r(x, \eta(t+1))\} + \\ + \mathsf{M}\{r^2(x, \eta(t+1))\, |\eta(t+1)|^2\}, \tag{8.6}$$

где

$$r(x, \eta(t+1)) = \frac{\operatorname{sign}(x^{(0)}, \eta(t+1)) - \operatorname{sign}(x, \eta(t+1))}{2}.$$

Из (8.6) и справедливых при всех x, y неравенств

$$r^2(x, y) = |r(x, y)| \leqslant 1,$$

$$[(x^{(0)}, y) - (x, y)]\, r(x, y) \geqslant 0,$$

$$(x^{(0)}, y)\, r(x, y) \geqslant 0, \qquad (x, y)\, r(x, y) \leqslant 0$$

легко получим

$$LV(x) \leqslant \mathsf{M}\{|r(x, \eta(t+1))|\,(|\eta(t+1)|^2 - \\ - 2|(x^{(0)} - x, \eta(t+1))|)\} \leqslant \\ \leqslant \mathsf{M}\{(|\eta(t+1)|^2 - 2|(x^{(0)}, \eta(t+1))|)\,|r(x, \eta(t+1))|\}.$$

Последнее неравенство и (8.5) позволяют получить основную для дальнейшего оценку

$$LV(x) \leqslant -\mathsf{M}|r(x, \eta(t+1))|. \tag{8.7}$$

Воспользуемся теперь леммой 3.1. Из нее и (8.7) вытекает неравенство

$$\sum_{t=0}^{\infty} \mathsf{M} \left| \mathsf{M} \left| [r(x, \eta(t+1)) |] \right| \right|_{x=X(t)} \leqslant V(x) < \infty.$$

Величины $X(t)$ и $\eta(t+1)$ независимы. Поэтому (см. задачу 1.4.1, б)) последнее неравенство можно переписать в виде

$$\sum_{t=0}^{\infty} \mathsf{M} \, | r(X(t), \eta(t+1)) | < \infty. \tag{8.8}$$

Из (8.8) и теоремы Фубини вытекает, что ряд

$$\sum_{t=0}^{\infty} | r(X(t), \eta(t+1)) |$$

сходится почти наверное. А величина $| r(X(t), \eta(t+1)) |$ может принимать лишь значения 0 и 1 и потому сходимость этого ряда означает, что при $t \geqslant t_0(\omega)$

$$r(X(t), \eta(t+1)) \equiv 0 \quad (\text{п. н.}).$$

Последнее эквивалентно (8.2). Отсюда и из (8.4) вытекает равенство

$$X(t) \equiv X(t_0, \omega), \quad t \geqslant t_0(\omega) \quad (\text{п. н.}).$$

Таким образом, оба утверждения теоремы доказаны.

Отметим в заключение, что основное предположение о том, что подлежащие распознаванию множества могут быть разделены гиперплоскостью, эквивалентно требованию существования так называемой разделяющей функции, если рассматривать задачу в спрямляющем пространстве (см. АБР, гл. V).

ГЛАВА 3

МАРКОВСКИЕ ПРОЦЕССЫ И СТОХАСТИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

Определяется марковский процесс с непрерывным временем. Далее рассматриваются два подхода к стохастическому дифференциальному уравнению, первый из которых принадлежит С. Н. Бернштейну, а второй — И. И. Гихману и К. Ито. В связи с этим вводится понятие и изучаются свойства стохастического интеграла в смысле Ито. Приводятся без доказательств некоторые свойства решений стохастических дифференциальных уравнений. Доказанные в гл. 2 теоремы о выходе из области и сходимости траекторий распространяются на случай марковских процессов с непрерывным временем.

§ 1. Марковские процессы с непрерывным временем

В гл. 1 был определен случайный процесс с дискретным временем как совокупность случайных величин, зависящих от параметра t, который принимает значения из некоторого счетного множества. Пусть теперь параметр t принимает любые значения из некоторого множества T, имеющего мощность континуум. Пусть, кроме того, $(\Omega = \{\omega\}, \mathfrak{A}, \mathsf{P})$ — некоторое вероятностное пространство. Функция $X(t) = X(t, \omega)$, $t \in T$, $\omega \in \Omega$, со значениями в E_l называется *случайным процессом*, если $X(t, \omega)$ при каждом t является случайной величиной. Функция $X(t, \omega)$ при фиксированном ω называется траекторией случайного процесса. В дальнейшем мы будем считать, что $T = \{t: a \leqslant t < b\}$, где $a < b \leqslant \infty$.

Обозначим через $\mathscr{B}$ σ-алгебру борелевских множеств отрезка T. Процесс $X(t, \omega)$ называется измеримым, если функция $X(t, \omega)$ измерима относительно σ-алгебры $\mathscr{B} \times \mathfrak{A}$, являющейся наименьшей σ-алгеброй, содержащей множества вида $B \times A$, где $B \in \mathscr{B}$, $A \in \mathfrak{A}$.

В отличие от дискретного времени, в случае, когда t принимает значения из несчетного множества T, некоторые ω-множества, естественным образом связанные с процессом $X(t, \omega)$, $t \in T$, могут быть неизмеримыми. Например, ω-множества

$$\{\omega: \sup_{t \in T} X(t, \omega) \in \Gamma\}, \qquad \{\omega: \inf_{t \in T} X(t, \omega) \in \Gamma\} \tag{1.1}$$

не представимы, вообще говоря, в виде пересечения не более чем счетного числа событий из $\mathfrak{A}$, как это имеет место, когда t — дискретный параметр, и потому не обязательно измеримы. Однако во многих случаях важно, чтобы ω-множества типа (1.1) можно было рассматривать как события. Процессы, обладающие таким свойством, называются *сепарабельными*. Более точно, процесс $X(t, \omega)$, $t \in T$, называется сепарабельным, если существуют такие счетное всюду плотное множество $\Lambda \in T$ и событие N нулевой вероятности, что для любого замкнутого множества $\Gamma \in$ [illegible] и любого открытого множества $T' \subset T$ найдется множество $A \subset N$, для которого

$$\{X(t, \omega) \in \Gamma \text{ при } t \in T'\} = \{X(t, \omega) \in \Gamma \text{ при } t \in \Lambda T'\} \setminus A.$$

Из этого требования и полноты вероятностной меры P (которую мы в дальнейшем будем предполагать) вытекает, в частности, и измеримость множеств (1.1).

Можно показать (см. Дуб [1]), что для любого случайного процесса найдется стохастически эквивалентный [1]) ему сепарабельный процесс.

Важную роль среди всех случайных процессов с непрерывным временем играют марковские процессы. Их определение полностью аналогично соответствующему определению 1.2 в случае дискретного времени. Именно, пусть A — борелевское множество, а функция $P(s, x, t, \Gamma)$ определена при $x \in A$, $0 \leqslant s \leqslant t$, $s, t \in T$, $\Gamma \subset A$, причем $\Gamma \in \mathfrak{B}_l$. Эта функция называется *переходной функцией*

[1]) Процессы $X(t)$ и $Y(t)$, $t \in T$, называются стохастически эквивалентными на T, если $\mathsf{P}\{X(t) = Y(t)\} = 1$ при всех $t \in T$.

в A, если она $\mathfrak{B}_l$-измерима по x, является вероятностной мерой по Γ ($P(s, x, t, A) \equiv 1$) и удовлетворяет при $s < u < t$ соотношению (2.1.1).

Пусть $P(s, x, t, \Gamma)$ — переходная функция в A, $A \in \mathfrak{B}_l$. Процесс $X(t) = X(t, \omega)$ в A называется марковским с этой переходной функцией, если для любых $s < u < t$ выполнено соотношение

$$\mathsf{P}\{X(t) \in \Gamma/\mathcal{N}_u\} = P(u, X(u), t, \Gamma) \text{ (п. н.).}$$

Здесь, как обычно, $\mathcal{N}_u$ — σ-алгебра, порожденная случайными величинами $X(v)$, $v \leqslant u$.

Нетрудно видеть, что приведенные в § 2.1 свойства марковского процесса с дискретным временем остаются в силе и для непрерывного времени.

Точно так же, как и в случае дискретного времени, под условной вероятностью $\mathsf{P}\{X(t) \in \Gamma/X(u)\}$, $u < t$, будем понимать в дальнейшем ее регулярный вариант, т. е. считать, что $\mathsf{P}\{X(t) \in \Gamma/X(u)\}$ является мерой по Γ при любом фиксированном $X(u) = x \in E_l$ (подробнее см. § 2.1).

Если при любых фиксированных $s, t \in T$, $x \in E_l$ переходная вероятность $P(s, x, t, \Gamma)$ имеет плотность по мере Лебега, так что

$$P(s, x, t, \Gamma) = \int_{\Gamma} p(s, x, t, y)\, dy,$$

то функцию $p(s, x, t, y)$ будем называть *переходной плотностью* соответствующего марковского процесса.

Переходную функцию $P(s, x, t, \Gamma)$ назовем *однородной* по времени, если $P(s, x, t+s, \Gamma)$ не зависит от s. Однородная по времени переходная функция является функцией одного временного аргумента, так как в этом случае $P(s, x, t, \Gamma) = P(0, x, t-s, \Gamma)$, и поэтому мы будем обозначать ее $P(x, t-s, \Gamma)$. Аналогичное обозначение примем и для плотности однородного марковского процесса (если она существует).

Рассмотрим следующий важный пример марковского случайного процесса, используемый ниже. Именно, назовем сепарабельный процесс $\xi(t) = \xi(t, \omega)$ со значениями в E_1, $t \geqslant 0$, *стандартным винеровским процессом*, если:

1° $\xi(0) = 0$, $\mathsf{M}\xi(t) = 0$, $\mathsf{M}\xi^2(t) = t$,

2° приращения процесса $\xi(t) - \xi(u)$, $\xi(v) - \xi(s)$ независимы для любых $t > u \geqslant v > s$, 3° при любых фиксированных $t, h \geqslant 0$ случайная величина $\xi(t+h) - \xi(t)$ распределена по нормальному закону, так что

$$\mathsf{P}\{\xi(t+h) - \xi(t) \in \Gamma\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi h}} \int\limits_{\Gamma} e^{-y^2/2h}\, dy, \quad \Gamma \in \mathfrak{B}_1.$$

Покажем, что процесс $\xi(t)$ является марковским. Для этого рассмотрим произвольный набор чисел $u_1 < u_2 < \ldots < u_n$, меньших t. Тогда, используя независимость приращений процесса $\xi(t)$ на непересекающихся промежутках времени, получим [1])

$$\mathsf{P}\{\xi(t) \in \Gamma/\xi(u_1) = x_1,\ \xi(u_2) = x_2, \ldots, \xi(u_n) = x_n\} =$$
$$= \mathsf{P}\{\xi(t) - \xi(u_n) \in \Gamma - x_n/\xi(u_1) - \xi(0) =$$
$$= x_1,\ \xi(u_2) - \xi(0) = x_2, \ldots, \xi(u_n) - \xi(0) = x_n\} =$$
$$= \mathsf{P}\{\xi(t) - \xi(u_n) \in \Gamma - x_n\} =$$
$$= \mathsf{P}\{\xi(t) - \xi(u_n) \in \Gamma - x_n/\xi(u_n) = x_n\}.$$

Отсюда находим, что, во-первых, для $t > u$

$$\mathsf{P}\{\xi(t) \in \Gamma/\mathcal{N}_u\} = \mathsf{P}\{\xi(t) \in \Gamma/\xi(u)\} \text{ (п. н.)} \qquad (1.2)$$

и, во-вторых,

$$\mathsf{P}\{\xi(t) \in \Gamma/\xi(u) = x\} = \mathsf{P}\{\xi(t) - \xi(u) \in \Gamma - x\} =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-u)}} \int\limits_{\Gamma - x} e^{-z^2/2(t-u)}\, dz =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-u)}} \int\limits_{\Gamma} e^{-(y-x)^2/2(t-u)}\, dy. \qquad (1.3)$$

Согласно равенствам (1.2), (1.3) $\xi(t)$ — однородный марковский случайный процесс с переходной плотностью

$$p(x, t, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-(y-x)^2/2t}.$$

Отметим некоторые свойства стандартного винеровского процесса $\xi(t)$.

---

[1]) Здесь $\Gamma - x$ — множество точек вида $y - x$, где $y \in \Gamma$.

Нетрудно подсчитать, что для любого целого n

$$\mathsf{M}[\xi(t+s)-\xi(t)]^{2n}=\frac{1}{\sqrt{2\pi s}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2/2s}z^{2n}\,dz=(2n-1)!!\,s^n.$$

В частности,

$$\mathsf{M}\,[\xi\,(t+s)-\xi\,(t)]^2=s, \tag{1.4}$$

$$\mathsf{M}\,[\xi\,(t+s)-\xi\,(t)]^4=3s^2. \tag{1.5}$$

Траектории процесса $\xi(t)$ непрерывны с вероятностью 1. Это утверждение вытекает из (1.5) и следующей теоремы Колмогорова (см., например, Гихман и Скороход [1]): если для некоторых $\alpha>0$, $\beta>0$, K и всех $t_i\geqslant 0$ для сепарабельного случайного процесса $X\,(t)$ выполняется соотношение

$$\mathsf{M}\,|\,X\,(t_2)-X\,(t_1)\,|^\alpha\leqslant K\,\,|\,t_2-t_1\,|^{1+\beta},$$

то $X\,(t)$, $t\geqslant 0$, непрерывен с вероятностью 1.

Заметим еще, что процесс $\xi\,(t)$ не дифференцируем. В самом деле, легко подсчитать, что случайная величина $\eta_h\,(t)=[\xi\,(t+h)-\xi\,(t)]/h$ имеет нормальное распределение с параметрами $(0,\,1/h)$, и поэтому $\eta_h\,(t)$ не может иметь предела при $h\to 0$ ни в каком вероятностном смысле.

Назовем *стандартным винеровским процессом со значениями в* E_l процесс $\xi\,(t)=(\xi_1\,(t),\,\ldots,\,\xi_l\,(t))$, каждая компонента которого является стандартным винеровским процессом, причем процессы $\xi_1\,(t),\,\ldots,\,\xi_l\,(t)$ независимы в совокупности.

Для дальнейшего нам понадобится следующая

Лемма 1.1. *Пусть* $a=t_0<t_1<\ldots<t_n=b$ — *произвольное разбиение отрезка* $[a,\,b]$ *на* n *частей, причем* $\Delta=\max\,(t_{i+1}-t_i)$. *Тогда*

$$\eta_\Delta=\sum_{k=0}^{n-1}[\xi(t_{k+1})-\xi(t_k)]^2\to b-a$$

по вероятности при $\Delta\to 0$.

Действительно, в силу неравенства Чебышева достаточно показать, что дисперсия $\mathsf{D}\eta_\Delta$ случайной величины η_Δ стремится к нулю при $\Delta\to 0$, поскольку $\mathsf{M}\eta_\Delta=b-a$. Так как приращения процесса $\xi\,(t)$ на непересекающихся промежутках времени независимы, а также справедливы формулы (1.4), (1.5), то

$$\mathsf{D}\eta_\Delta = \mathsf{D}\sum_{k=0}^{n-1}[(\xi(t_{k+1})-\xi(t_k))^2-(t_{k+1}-t_k)] =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1}\mathsf{D}\,[(\xi(t_{k+1})-\xi(t_k))^2-(t_{k+1}-t_k)] =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1}\mathsf{M}\,[(\xi(t_{k+1})-\xi(t_k))^2-(t_{k+1}-t_k)]^2 =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1}\mathsf{M}\,[(\xi(t_{k+1})-\xi(t_k))^4-2(t_{k+1}-t_k)\,\mathsf{M}\,(\xi(t_{k+1})-$$

$$-\xi(t_k))^2+(t_{k+1}-t_k)^2] =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1}[3(t_{k+1}-t_k)^2-2(t_{k+1}-t_k)^2+(t_{k+1}-t_k)^2] =$$

$$= 2\sum_{k=0}^{n-1}(t_{k+1}-t_k)^2 \leqslant 2\Delta(b-a)\to 0 \ \text{ при } \ \Delta\to 0.$$

§ 2. Стохастическое дифференциальное уравнение. I

Возвратимся снова к дискретной модели диффузии, рассмотренной в § 2.4 и описываемой рекуррентным соотношением

$$X(t+h)-X(t) = \\ = b(t, X(t))\,h+\sigma(t, X(t))\,\xi_h(t+h). \quad (2.1)$$

Возникает естественный вопрос о том, будет ли марковский процесс $X(t) = X_h^{s,x}(t)$, $t = s, s+h, \ldots$, определяемый соотношением (2.1) и начальным условием $X_h^{s,x}(s) = x$, сходиться в каком-либо вероятностном смысле к некоторому процессу с непрерывным временем.

Следующая теорема показывает, что производящий дифференциальный оператор

$$L_h V(t, x) = \frac{1}{h}\mathsf{M}[V(t+h, X_h^{t,x}(t+h)) - V(t, x)],$$

связанный с (2.1), сходится при $h\to 0$ для широкого класса функций к некоторому пределу.

Обозначим через C_2 класс функций $V(t, x)$, непрерывно дифференцируемых по t и дважды непрерывно дифференцируемых по x.

Теорема 2.1. *Пусть функции $b(t, x)$, $\sigma(t, x)$ и случайные величины $\xi_h(t)$ удовлетворяют условиям* а), б) *§ 2.4 и, кроме того, для некоторой постоянной C*

$$\mathsf{M}\xi_h^4(t) \leqslant Ch^2. \tag{2.2}$$

Тогда для любой функции $V(t, x) \in C_2$, вторая производная $\partial^2 V(t, x)/\partial x^2$ которой равномерно в некоторой окрестности каждой точки t удовлетворяет условию Липшица по x, справедливо равенство

$$\lim_{h\to 0} L_h V(t, x) = LV(t, x), \qquad t \geqslant 0, \quad x \in E_1,$$

где

$$LV(t, x) = \frac{\partial V}{\partial t} + b(t, x)\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\sigma^2(t, x)}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}.$$

Доказательство. Положим

$$X_h^{t, x}(t+h) - x = \Delta_h X(t).$$

Как вытекает из (2.1),

$$\Delta_h X(t) = b(t, x)h + \sigma(t, x)\xi_h(t).$$

Используя непрерывность частных производных функции $V(t, x)$, получим, разлагая ее по формуле Тейлора $(h \to 0)$,

$$\begin{aligned} V(t+h, X_h^{t,x}(t+h)) - V(t, x) &= \\ = V(t+h, x+\Delta_h X(t)) - V(t, x) &= \\ = \frac{\partial V}{\partial t}(t, x)\,h\,[1+o(1)] + \Delta_h X(t)\frac{\partial V}{\partial x}(t+h, x) &+ \\ + \frac{(\Delta_h X(t))^2}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(t+h, x) + \delta&, \end{aligned} \tag{2.3}$$

где

$$\delta = \frac{(\Delta_h X(t))^2}{2}\left[\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(t+h, x+\theta\Delta_h X(t)) - \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(t+h, x)\right],$$
$$0 < \theta < 1.$$

Отсюда и вытекающих из (2.4.3), (2.4.4) соотношений

$$\lim_{h\to 0}\frac{\mathsf{M}\Delta_h X(t)}{h} = b(t, x), \quad \lim_{h\to 0}\frac{\mathsf{M}(\Delta_h X(t))^2}{h} = \sigma^2(t, x)$$

будем иметь после взятия математического ожидания от обеих частей равенства (2.3)

$$\lim_{h\to 0} L_h V(t, x) = \frac{\partial V}{\partial t} + b(t, x)\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\sigma^2(t, x)}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \lim_{h\to 0}\frac{\mathsf{M}\delta}{h}.$$

Осталось показать, что $\lim\limits_{h\to 0}(\mathsf{M}\delta/h) = 0$. Поскольку функция $\partial^2 V/\partial x^2$ удовлетворяет условию Липшица по x, то для некоторого $C_1 > 0$

$$\lim_{h\to 0}\frac{|\mathsf{M}\delta|}{h} \leqslant C_1 \lim_{h\to 0}\frac{\mathsf{M}\,|\Delta_h X(t)|^3}{h} \leqslant C_1 \lim_{h\to 0}\frac{\{\mathsf{M}\,(\Delta_h X(t))^4\}^{3/4}}{h}. \quad (2.4)$$

Кроме того, из (2.2) легко получить неравенство

$$\mathsf{M}\,(\Delta_h X(t))^4 \leqslant C_2 h^2, \qquad C_2 > 0,$$

и, значит, согласно (2.4)

$$\lim_{h\to 0}\frac{|\mathsf{M}\delta|}{h} \leqslant C_3 \lim_{h\to 0}\frac{h^{3/2}}{h} = 0.$$

Теорема доказана.

Теорема 2.1 дает основания рассчитывать, что и сам процесс $X_h^{s, x}(t)$ сходится в некотором вероятностном смысле к предельному при $h \to 0$. Первые теоремы такого рода были получены С. Н. Бернштейном, который показал, что при некоторых предположениях

$$\mathsf{P}\,\{X_h^{s, x}(t_h) \in \Gamma\} \to P(s, x, t, \Gamma),$$

если $h \to 0$, $t_h \to t$. При этом $P(s, x, t, \Gamma)$ — переходная функция некоторого марковского процесса $X_0(t)$ с непрерывным временем, имеющего плотность $p(s, x, t, y)$, удовлетворяющую уравнению

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{\partial (pb)}{\partial y} + \frac{1}{2}\frac{\partial (p\sigma^2)}{\partial y^2}.$$

Естественно ожидать, что для функций $V(t, x) \in \boldsymbol{C}_2$ и таких, что $\mathsf{M}V(s+h, X_0^{s,x}(s+h))$ существует, справедлива формула

$$\lim_{h\to 0}\frac{\mathsf{M}\,[V(s+h, X_0^{s, x}(s+h)) - V(s, x)]}{h} = LV.$$

В соответствии с формулами (2.4.3), (2.4.4) можно предположить, что коэффициенты $b(t, x)$ и $\sigma(t, x)$ имеют следующий вероятностный смысл

$$\lim_{h\to 0} \mathsf{M}\left(\frac{X_0(t+h)-X_0(t)}{h} \Big/ X_0(t)\right) = b(t, X_0(t)),$$

$$\lim_{h\to 0} \mathsf{M}\left(\frac{[X_0(t+h)-X_0(t)]^2}{h} \Big/ X_0(t)\right) = \sigma^2(t, X_0(t)).$$

В следующих параграфах будет изложен кратко другой подход, состоящий в построении решения непрерывного аналога конечноразностного уравнения (2.1) и, в частности, будут обоснованы эти формулы.

§ 3. Стохастический интеграл

Естественно попытаться, переходя в (2.1) к пределу при $h \to 0$, получить дифференциальное уравнение для непрерывного случайного процесса. В качестве $\xi_h(t)$ можно использовать, например, разности $\xi(t+h) - \xi(t)$, где $\xi(t)$ — стандартный винеровский процесс. (При таком выборе $\xi_h(t)$ условия б) § 2.4 и (2.2) выполнены.) Тогда соотношение (2.1) примет вид

$$\frac{X(t+h)-X(t)}{h} = b(t, X(t)) + \sigma(t, X(t))\frac{\xi(t+h)-\xi(t)}{h}. \qquad (3.1)$$

Однако непосредственный переход к пределу в (3.1) при $h \to 0$ невозможен, поскольку в силу недифференцируемости процесса $\xi(t)$ величина $[\xi(t+h) - \xi(t)]/h$ не имеет при $h \to 0$ предела, и получающееся таким образом уравнение

$$\frac{dX(t)}{dt} = b(t, X(t)) + \sigma(t, X(t))\frac{d\xi(t)}{dt} \qquad (3.2)$$

нельзя рассматривать как обыкновенное дифференциальное уравнение. Тем не менее уравнение (3.2) можно понимать в интегральной форме

$$X(t) - X(s) = \int_s^t b(u, X(u))\,du + \int_s^t \sigma(t, X(u))\,d\xi(u). \qquad (3.3)$$

Такой подход был впервые предложен К. Ито, который придал смысл уравнению (3.3) на основе понятия стохастического интеграла (см. последний интеграл в правой части (3.3)). К основам этого построения мы сейчас и перейдем. Более подробное изложение читатель может найти, например, в книгах Гихмана и Скорохода [1], [2].

Пусть на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathsf{P})$ задан стандартный винеровский процесс $\xi(t) = \xi(t, \omega)$ при $t \geqslant 0$. Пусть, далее, $\mathscr{F}_t$ $(t \geqslant 0)$ — монотонная последовательность σ-алгебр множеств из $\mathfrak{A}$, связанных с процессом $\xi(t)$ следующим образом:

1) при каждом $t \geqslant 0$ случайная величина $\xi(t, \omega)$ измерима относительно $\mathscr{F}_t$,

2) приращение процесса $\xi(t+s) - \xi(t)$ при любом $s \geqslant 0$ не зависит от σ-алгебры $\mathscr{F}_t$.

Обозначим также через $\boldsymbol{L}_2[a, b]$, $0 \leqslant a < b$, совокупность измеримых по переменным (t, ω) скалярных функций $f(t) = f(t, \omega)$, определенных при $t \in [a, b]$, $\omega \in \Omega$ и удовлетворяющих условиям:

1) функция $f(t)$ $\mathscr{F}_t$-измерима при каждом $t \in [a, b]$,

2) интеграл

$$\int_a^b f^2(t)\, dt$$

конечен с вероятностью 1.

Определим стохастический интеграл Ито

$$\int_a^b f(t)\, d\xi(t)$$

сначала для ступенчатых функций $f(t) \in \boldsymbol{L}_2[a, b]$.

Именно, если $f(t)$ — ступенчатая функция из $\boldsymbol{L}_2[a, b]$ со скачками в точках $t_1 < t_2 < \ldots < t_{n-1}$, то положим

$$\int_a^b f(t)\, d\xi(t) = \sum_{i=0}^{n-1} f(t_i)\,[\xi(t_{i+1}) - \xi(t_i)], \quad t_0 = a,\ t_n = b. \tag{3.4}$$

Для ступенчатых функций $f(t)$, $g(t) \in \boldsymbol{L}_2[a, b]$, используя независимость случайных величин $\xi(t_{i+1}) - \xi(t_i)$ и $f(t_i)$, $g(t_i)$, легко проверить справедливость следующих свойств интеграла (3.4):

$$\mathsf{M}\left(\int_a^b f(t)\, d\xi(t)/\mathscr{F}_a\right) = 0 \quad (\text{п. н.}), \tag{3.5}$$

и

$$\mathsf{M}\left(\left[\int_a^b f(t)\,d\xi(t)\right]^2\Big/\mathscr{F}_a\right)=\int_a^b \mathsf{M}\left(f^2(t)/\mathscr{F}_a\right)dt, \quad (\text{п. н.}) \qquad (3.6')$$

$$\mathsf{M}\left(\int_a^b f(t)\,d\xi(t)\int_a^b g(t)\,d\xi(t)/\mathscr{F}_a\right)=\mathsf{M}\left(\int_a^b f(t)\,g(t)\,dt/\mathscr{F}_a\right). \qquad (3.6'')$$

Пусть теперь $f(t)$ — любая функция из $\boldsymbol{L}_2[a, b]$. Можно доказать (см., например, Гихман и Скороход [1], гл. 8, § 2), что существует последовательность ступенчатых функций $f_n(t) \in \boldsymbol{L}_2[a, b]$, для которой с вероятностью 1

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b [f(t)-f_n(t)]^2\,dt=0.$$

При этом последовательность

$$\int_a^b f_n(t)\,d\xi(t)$$

сходится по вероятности при $n\to\infty$ к некоторому не зависящему от выбора $f_n(t)$ пределу. Этот предел обозначается $\int_a^b f(t)\,d\xi(t)$ и называется *стохастическим интегралом* Ито. Можно также показать, что соотношения (3.5), (3.6) остаются справедливыми, если только

$$\int_a^b \mathsf{M}\left(f^2(t)/\mathscr{F}_a\right)dt<\infty, \quad \int_a^b \mathsf{M}\left(g^2(t)/\mathscr{F}_a\right)dt<\infty \quad (\text{п. н.}). \qquad (3.7)$$

Из (3.5). (3.6′) получаем, в частности,

$$\mathsf{M}\int_a^b f(t)\,d\xi(t)=0, \quad \text{если} \quad \int_a^b \mathsf{M}f^2(t)\,dt<\infty. \qquad (3.8)$$

Мы рассмотрели стохастический интеграл от скалярной функции. Однако понятие стохастического интеграла естественным образом (покоординатно) распространяется и на функции $f(t)=f(t, \omega)$ со значениями в E_l, для которых $|f(t)| \in \boldsymbol{L}_2[a, b]$.

Изучим свойства процесса

$$G(t)=\int_a^t f(s, \omega)\, d\xi(s) \tag{3.9}$$

как функции верхнего предела. В дальнейшем рассматривается лишь сепарабельный вариант $G(t)$, который, как известно (см. Гихман и Скороход [1]), представляет собой непрерывный с вероятностью 1 случайный процесс. Для любых $t \in [a, T]$, $T > a$, $f(s) = f(s, \omega) \in L_2[a, T]$ справедливо равенство

$$\int_a^t f(s)\, d\xi(s)=\int_a^T \chi_t(s) f(s)\, d\xi(s), \tag{3.10}$$

где

$$\chi_t(s)=\begin{cases} 1, & \text{если } s \leqslant t, \\ 0, & \text{если } s > t. \end{cases}$$

(Для ступенчатых функций это равенство очевидно. В общем случае оно доказывается с помощью предельного перехода.)

Пусть теперь ζ — произвольная случайная величина. Определим интеграл со случайным верхним пределом равенством

$$\int_a^\zeta f(s)\, d\xi(s)=G(\zeta),$$

где $G(t)$ задается формулой (3.9). Если, кроме того, ζ — случайная величина, *не зависящая от будущего*, т. е. такая, что $\{\omega: \zeta \leqslant t\} \in \mathcal{F}_t$ и, кроме того, $\mathsf{P}\{\zeta < T\} = 1$, то нетрудно убедиться в справедливости аналогичного (3.10) соотношения

$$\int_a^\zeta f(s)\, d\xi(s)=\int_a^T \chi_\zeta(s) f(s)\, d\xi(s). \tag{3.11}$$

Приведем теперь условия, при которых $\mathsf{M}G(\zeta) = 0$. То, что это равенство может не выполняться, показывает следующий пример. Пусть ζ — случайная величина, равная первому моменту, когда винеровский процесс $\xi(t)$ впервые примет значение, равное 1. Тогда, по определению, $\int\limits_0^{\zeta} d\xi(s) = \xi(\tau) - \xi(0)$ и, значит,

$$\mathsf{M}\int\limits_0^{\zeta} d\xi(s) = \mathsf{M}\xi(\tau) = 1.$$

Справедливо, однако, следующее утверждение, немедленно вытекающее из (3.8) и (3.11).

Лемма 3.1. *Если ζ — случайная величина, не зависящая от будущего, причем $\mathsf{P}\{\zeta < T\} = 1$ при некотором $T < \infty$, и $f(s)$ — функция из $L_2[a, T]$, для которой*

$$\int\limits_a^T \mathsf{M}(f^2(s)\,\chi_\zeta(s)/\mathscr{F}_a)\,ds < \infty, \ \textit{то}\ \ \mathsf{M}\left(\int\limits_a^{\zeta} f(s)\,d\xi(s)/\mathscr{F}_a\right) = 0.$$

§ 4. Стохастическое дифференциальное уравнение. II

Перейдем теперь к определению стохастического дифференциального уравнения. Пусть $\xi(t) = (\xi_1(t), \ldots, \xi_k(t))$ — стандартный винеровский процесс со значениями в E_k, $t \geqslant 0$, $\xi_i(t)$ — $\mathscr{F}_t$-измеримы, причем случайные величины $\xi_i(t+s) - \xi_i(t)$, $i = 1, \ldots, k$, не зависят в совокупности от любого события из $\mathscr{F}_t$ при $s \geqslant 0$. Пусть, далее, $b(t, x)$, $\sigma_1(t, x)$, $\ldots$, $\sigma_k(t, x)$ — измеримые по (t, x) векторы из E_l, определенные при $x \in E_l$, $t \in [t_0, T]$, $t_0 \geqslant 0$.

Под решением стохастического дифференциального уравнения

$$dX(t) = b(t, X(t))\,dt + \sum_{r=1}^{k} \sigma_r(t, X(t))\,d\,\xi_r(t) \tag{4.1}$$

будем понимать решение соответствующего интегрального уравнения

$$X(t) = X(t_0) + \int\limits_{t_0}^{t} b(u, X(u))\,du + \sum_{r=1}^{k} \int\limits_{t_0}^{t} \sigma_r(u, X(u))\,d\xi_r(u), \tag{4.2}$$

где $X(t_0)$ — некоторое заданное начальное условие, измеримое относительно $\mathscr{F}_{t_0}$, $t_0 \geqslant 0$, Всюду в дальнейшем сепарабельный случайный процесс $X(t)$ будем считать решением уравнения (4.2) на отрезке $[t_0, T]$, если случайная величина $X(t)$ $\mathscr{F}_t$-измерима, интегралы в (4.2) существуют, а равенство (4.2) справедливо при любом $t \in [t_0, T]$.

Следующая теорема устанавливает существование, единственность и некоторые свойства решения уравнения (4.2).

Теорема 4.1. *Пусть векторы $b(u, x)$, $\sigma_1(u, x), \ldots, \sigma_k(u, x)$ $(t_0 \leqslant u \leqslant T,\ x \in E_l)$ непрерывны по (u, x) и для некоторой постоянной K*

$$|b(u, x) - b(u, y)| + \sum_{r=1}^{k} |\sigma_r(u, x) - \sigma_r(u, y)| \leqslant K|x - y|, \tag{4.3'}$$

$$|b(u, x)| + \sum_{r=1}^{k} |\sigma_r(u, x)| \leqslant K(1 + |x|). \tag{4.3''}$$

Тогда:

1) *для любой случайной величины $X(t_0)$, независимой от процессов $\xi_r(t) - \xi_r(t_0)$, существует единственное с точностью до стохастической эквивалентности в сильном смысле*[1]) *решение $X(t) = X^{t_0, X(t_0)}(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant T$, уравнения (4.2), являющееся непрерывным с вероятностью 1 процессом.*

2) *Это решение является марковским случайным процессом с переходной функций $P(s, x, t, \Gamma)$, определяемой при $t > s \geqslant t_0$ соотношением $P(s, x, t, \Gamma) = \mathsf{P}\{X^{s, x}(t) \in \Gamma\}$, где $X^{s, x}(t)$ — решение уравнения*

$$X^{s,x}(t) = x + \int_s^t b(u, X^{s,x}(u))\,du + \sum_{r=1}^{k} \int_s^t \sigma_r(u, X^{s,x}(u))\,d\xi_r(u).$$

3) *Существует такая постоянная $C = C(l, K, T - t_0)$, что*

$$\mathsf{M}\,|X^{s, x}(t) - x|^2 \leqslant C(t - s)^2(1 + |x|^2).$$

[1]) Т. е. в том смысле, что для любых двух решений $X_1(t)$ и $X_2(t)$

$$\mathsf{P}\,\{\sup_{t_0 \leqslant t \leqslant T} |X_2(t) - X_1(t)| > 0\} = 0.$$

4) *Если коэффициенты уравнения* (3.5) *не зависят от времени, то переходная функция марковского процесса* $X(t)$ *однородна.*

Доказательство этой теоремы можно найти в монографиях Дынкина [1], Гихмана и Скорохода [2].

В дальнейшем нам удобно будет ввести понятие стохастического дифференциала. *Стохастическим дифференциалом Ито* процесса $\eta(t)$, определенного при $t \in [a, b]$, $\mathscr{F}_t$-измеримого при каждом t, называется выражение $b(t)\,dt + \sum_{r=1}^{k} \sigma_r(t)\,d\xi_r(t)$, если функция $|b(t)|$ п. н. интегрируема на отрезке $[a, b]$, $\sigma_r(t) \in L_2[a, b]$, функции $b(t)$, $\sigma_r(t)$ $\mathscr{F}_t$-измеримы и

$$\eta(t_2) - \eta(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} b(t)\,dt + \sum_{r=1}^{k} \int_{t_1}^{t_2} \sigma_r(t)\,d\xi_r(t)$$

при всех $a < t_1 < t_2 < b$.

В свете этого определения стохастическое дифференциальное уравнение (4.1) можно понимать как уравнение, связывающее стохастические дифференциалы процессов $X(t)$ и $\xi_r(t)$. Можно чисто формально записать уравнение (4.1) и в «производных» следующим образом:

$$\dot{X}(t) = b(t, X(t)) + \sum_{r=1}^{k} \sigma_r(t, X(t))\,\dot{\xi}_r(t). \tag{4.1'}$$

В технических приложениях часто употребляется такая запись; при этом $\dot{\xi}_r(t)$ называют гауссовскими «белыми шумами», а решение уравнения (4.1) интерпретируют как случайный процесс, порождаемый воздействием на динамическую систему $\dot{X} = b(t, X)$ гауссовских белых шумов переменной, вообще говоря, интенсивности. Мы также будем иногда употреблять запись уравнения (4.1) в виде (4.1′) [1]).

Отметим еще раз (см. § 3), что уравнение (4.1) представляет собой естественное расширение на непрерывное вре-

[1]) Следует иметь в виду, что стохастический дифференциал $dX(t)$ и, следовательно, уравнения (4.1), (4.1′) можно понимать неоднозначно (см. по этому поводу Стратонович [1]). Однако в этой книге мы рассматриваем лишь стохастический дифференциал в смысле Ито и связанное с ним понимание уравнений (4.1), (4.1′).

мя способа построения марковской цепи по последовательности независимых случайных величин, изложенного в § 2.3. Конечно, допуская вместо винеровских процессов $\xi_r(t)$ более широкий класс процессов с независимыми приращениями, можно таким путем получить и более широкий класс марковских процессов с разрывными, вообще говоря, траекториями (см., например, Скороход, [1], Гихман и Скороход [2]). Мы, как это указано в предисловии, будем рассматривать лишь процессы с непрерывными траекториями, что позволяет ограничиться изучением уравнений вида (4.1).

§ 5. Формула Ито

Как известно, если $V(t, x)$, $x \in E_1$,— достаточно гладкая функция, а $X(t)$ — решение обыкновенного дифференциального уравнения $dX(t) = b(t, X(t))\,dt$, то $V(t, X(t))$ имеет дифференциал, причем согласно правилу дифференцирования сложной функции

$$dV(t, X(t)) = \left[\frac{\partial V}{\partial t}(t, X(t)) + b(t, X(t))\frac{\partial V}{\partial x}(t, X(t))\right] dt. \tag{5.1}$$

Оказывается, что и в случае, когда $X(t)$ — процесс, определяемый стохастическим дифференциальным уравнением

$$dX(t) = b(t, X(t))\,dt + \sigma(t, X(t))\,d\xi(t), \tag{5.2}$$

также может быть получена формула, аналогичная (5.1), если под $dV(t, X(t))$ понимать стохастический дифференциал. Эта формула впервые была установлена К. Ито [1]. Ее полное доказательство можно найти, например, в книге Гихмана и Скорохода [1]. Здесь мы приведем лишь эвристический вывод формулы Ито, не останавливаясь на деталях.

Пусть $V(t, x)$ — достаточно гладкая функция, а $X(t)$ — решение стохастического уравнения (5.2) с непрерывными коэффициентами. Будем предполагать, что $X(t)$ также непрерывно с вероятностью 1. Тогда

$$V(t, X(t)) - V(s, X(s)) = \sum_{i=0}^{n-1} [V(t_{i+1}, X(t_{i+1})) - V(t_i, X(t_i))],$$

где $s = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = t$ — некоторое разбиение Δ отрезка $[s, t]$ такое, что $\delta = \max\limits_{0 \leq i \leq n-1} (t_{i+1} - t_i) \to 0$ при $n \to \infty$. Из формулы Тейлора, полагая $\Delta t_i = t_{i+1} - t_i$, $\Delta X(t_i) = X(t_{i+1}) - X(t_i)$, получим

$$V(t_{i+1}, X(t_{i+1})) - V(t_i, X(t_i)) = \\ = \frac{\partial V}{\partial t}(t_i, X(t_i))\,\Delta t_i + \frac{\partial V}{\partial x}(t_i, X(t_i))\,\Delta X(t_i) + \\ + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(t_i, X(t_i))\,[\Delta X(t_i)]^2 + \eta_i,$$

где η_i — остаточный член. Естественно ожидать, что суммы

$$\sum_{i=0}^{n-1} \frac{\partial V}{\partial t}(t_i, X(t_i))\,\Delta t_i, \quad \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\partial V}{\partial x}(t_i, X(t_i))\,\Delta X(t_i)$$

сходятся соответственно к интегралам

$$\int_s^t \frac{\partial V}{\partial t}(u, X(u))\,du$$

и

$$\int_s^t \frac{\partial V}{\partial x}(u, X(u))\,dX(u) = \int_s^t b(u, X(u))\frac{\partial V}{\partial x}(u, X(u))\,du + \\ + \int_s^t \sigma(u, X(u))\frac{\partial V}{\partial x}(u, X(u))\,d\xi(u).$$

Можно показать также, что $\sum\limits_{i=0}^{n-1} \eta_i$ сходится по вероятности к нулю.

Изучим асимптотическое поведение оставшейся суммы

$$I_n = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(t_i, X(t_i))\,[\Delta X(t_i)]^2.$$

Заметим прежде всего, что оно совпадает с асимптотическим поведением величины

$$\widetilde{I}_n = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1} \sigma^2(t_i, X(t_i))\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(t_i, X(t_i))\,[\Delta\xi(t_i)]^2,$$

так как

$$[\Delta X(t_i)]^2 \approx b^2(t_i, X(t_i))[\Delta t_i]^2 + \\ + 2b(t_i, X(t_i))\Delta t_i \Delta\xi(t_i) + \sigma^2(t_i, X(t_i))[\Delta\xi(t_i)]^2$$

и два первых члена в последнем соотношении суть бесконечно малые более высокого порядка, чем Δt. Далее, возьмем «более крупное» разбиение $\widetilde{\Delta} \subset \Delta$ отрезка $[s, t]$ точками $s = \widetilde{t}_0 < \widetilde{t}_1 < \ldots < \widetilde{t}_{\widetilde{n}} = t$ так, чтобы, во-первых, $\delta_{\widetilde{n}} = \max\limits_{0 \le k \le \widetilde{n}-1} (\widetilde{t}_{k+1} - \widetilde{t}_k) \to 0$ при $\widetilde{n} \to \infty$ и, во-вторых, каждый из отрезков $[\widetilde{t}_k, \widetilde{t}_{k+1}]$ содержал такое число n_k точек разбиения Δ, что $\min\limits_k n_k \to \infty$, когда $n \to \infty$.

Тогда

$$\widetilde{I}_n = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\widetilde{n}-1} {\sum}' \sigma^2(t_i, X(t_i)) \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(t_i, X(t_i))[\Delta\xi(t_i)]^2,$$

где индекс $'$ во второй сумме означает суммирование по тем i, для которых $t_i \in [\widetilde{t}_k, \widetilde{t}_{k+1})$. Заметим, наконец, что в силу непрерывности $X(t)$ и $\dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2}(t, x)$ справедливо асимптотическое равенство

$$\widetilde{I}_n \approx \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\widetilde{n}-1} \sigma^2(\widetilde{t}_k, X(\widetilde{t}_k)) \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(\widetilde{t}_k, X(\widetilde{t}_k)) {\sum}' [\Delta\xi(t_i)]^2$$

или, в силу леммы 1.1,

$$\widetilde{I}_n \approx \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\widetilde{n}-1} \sigma^2(\widetilde{t}_k, X(\widetilde{t}_k)) \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(\widetilde{t}_k, X(\widetilde{t}_k))(\widetilde{t}_{k+1} - \widetilde{t}_k).$$

Поскольку же последняя сумма является интегральной для интеграла

$$\frac{1}{2} \int_s^t \sigma^2(u, X(u)) \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(u, X(u))\, du,$$

то из приведенных рассуждений окончательно получаем формулу

$$V(t,\ X(t)) - V(s,\ X(s)) =$$

$$= \int_s^t \left[\frac{\partial V}{\partial t}(u,\ X(u)) + b(u,\ X(u))\frac{\partial V}{\partial x}(u,\ X(u)) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}\sigma^2(u,\ X(u))\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(u,\ X(u)) \right] dt +$$

$$+ \int_s^t \sigma(u,\ X(u))\frac{\partial V}{\partial x}(u,\ X(u))\,d\xi(u)$$

или в форме дифференциалов

$$dV(t,\ X(t)) = \left[\frac{\partial V}{\partial x}(t,\ X(t)) + b(t,\ X(t))\frac{\partial V}{\partial x}(t,\ X(t)) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}\sigma^2(t,\ X(t))\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(t,\ X(t)) \right] dt +$$

$$+ \sigma(t,\ X(t))\frac{\partial V}{\partial x}(t,\ X(t))\,d\xi(t).$$

После этих эвристических соображений, имевших целью лишь пояснить причину возникновения в последней формуле дополнительного слагаемого

$$\frac{1}{2}\sigma^2(t,\ X(t))\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(t,\ X(t))\,dt$$

по сравнению с детерминированным случаем, сформулируем следующую теорему Ито сразу для многомерных процессов.

Теорема 5.1. (См. Ито [1].) *Пусть* $V(t, x) \in \boldsymbol{C}_2$, $t \geqslant 0$, $x \in E_l$, *а процесс* $\zeta(t)$ *со значениями в* E_l *имеет стохастический дифференциал*

$$d\zeta(t) = b(t)\,dt + \sum_{r=1}^{k} \sigma_r(t)\,d\xi_r(t).$$

Тогда и процесс $\eta(t) = V(t,\ \zeta(t))$ *также имеет стохасти-*

ческий дифференциал, причем

$$d\eta(t) = \Big[\frac{\partial V}{\partial t}(t, \zeta(t)) + \Big(b(t), \frac{\partial}{\partial x}\Big) V(t, \zeta(t)) + \\ + \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{k}\Big(\sigma_r(t), \frac{\partial}{\partial x}\Big)^2 V(t, \zeta(t))\Big]dt + \\ + \sum_{r=1}^{k}\Big(\sigma_r(t), \frac{\partial}{\partial x}\Big) V(t, \zeta(t))\, d\xi_r(t). \tag{5.3}$$

$\Big($Здесь и далее через $\frac{\partial}{\partial x}$ обозначается вектор $\Big(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_l}\Big)^*$, $*$ — знак транспонирования.$\Big)$

Формула (5.3) называется *формулой Ито для стохастических дифференциалов.*

Применим формулу Ито (5.3) к функции $V(t, X(t))$, где $V(t, x) \in C_2$, а $X(t)$ — марковский случайный процесс, определяемый стохастическим дифференциальным уравнением (4.2). В этом случае, согласно (5.3),

$$V(t, X(t)) - V(s, X(s)) = \\ = \int_s^t LV(u, X(u))\, du + \\ + \sum_{r=1}^{k}\int_s^t \Big(\sigma_r(u, X(u)), \frac{\partial V}{\partial x}(u, X(u))\Big)\, d\xi_r(u), \tag{5.4}$$

где

$$LV(s, x) = \frac{\partial V}{\partial s} + \Big(b, \frac{\partial}{\partial x}\Big) V + \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{k}\Big(\sigma_r, \frac{\partial}{\partial x}\Big)^2 V \equiv \\ \equiv \frac{\partial V}{\partial s}(s, x) + \sum_{i=1}^{l} b_i(s, x)\frac{\partial V}{\partial x_i}(s, x) + \\ + \frac{1}{2}\sum_{i, j=1}^{l} a_{ij}(s, x)\frac{\partial^2 V}{\partial x_i\, \partial x_j}(s, x),$$

$$A(s, x) = ((a_{ij}(s, x))) = \sum_{r=1}^{k}\sigma_r(s, x)\sigma_r^*(s, x)$$

Если к тому же функция $V(t, x)$ и ее производные растут не быстрее, чем линейные функции, а коэффициенты уравнения (4.2) удовлетворяют условиям теоремы 4.1, то, вычисляя математическое ожидание от левой и правой части (5.4), учитывая свойство (3.8) стохастического интеграла и применяя теорему Фубини, получим:

$$\mathsf{M}\,[V(t, X(t)) - V(s, X(s))] = \int_s^t \mathsf{M} LV(u, X(u))\,du. \tag{5.5}$$

Подставив в равенство (5.5) вместо $X(t)$ случайный процесс $X^{s,x}(t)$, поделив обе части этого равенства на $t - s$ и переходя к пределу при $t \to s + 0$, легко найдем, что

$$LV(s, x) = \lim_{h \to +0} \frac{1}{h}\,[\mathsf{M} V(s+h, X^{s,x}(s+h)) - V(s, x)]. \tag{5.6}$$

Исходя из этого соотношения и вспоминая определение производящего оператора в случае дискретного времени, назовем оператор $LV(s, x)$ *производящим дифференциальным оператором* соответствующего марковского процесса. Назовем также вектор $b(s, x)$ *вектором сноса*, а матрицу

$$A(s, x) = ((a_{ij}(s, x))) = \Big(\Big(\sum_{r=1}^{k} \sigma_{ri}(s, x)\,\sigma_{rj}(s, x)\Big)\Big)$$

назовем *матрицей диффузии*.

Выясним вероятностный смысл вектора сноса и матрицы диффузии, предполагая по-прежнему, что выполнены условия теоремы 4.1. С этой целью, применяя формулу (5.6) к функциям $V(s, x) = x_i$, и $V(s, x) = x_i x_j$, найдем, что

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\,\mathsf{M}\,[X_i^{s,x}(s+h) - x_i] = b_i(s, x), \tag{5.7}$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\,\mathsf{M}\,[X_i^{s,x}(s+h)\,X_j^{s,x}(s+h) - x_i x_j] =$$

$$= b_i(s, x)\,x_j + b_j(s, x)\,x_i + a_{ij}(s, x). \tag{5.8}$$

С другой стороны, в силу (5.7),

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\,\mathsf{M}\,[X_i^{s,\,x}(s+h)\,X_j^{s,\,x}(s+h)-x_ix_j]=$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\,\mathsf{M}\,\{[x_i+X_i^{s,\,x}(s+h)-x_i]\,[x_j+X_j^{s,\,x}(s+h)-x_j]-$$
$$-x_ix_j\}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\,\mathsf{M}\,\{[X_i^{s,\,x}(s+h)-x_i]\,[X_j^{s,\,x}(s+h)-x_j]+$$
$$+[X_j^{s,\,x}(s+h)-x_j]\,x_i+[X_i^{s,\,x}(s+h)-x_i]\,x_j\}=$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\,\mathsf{M}\,[X_i^{s,\,x}(s+h)-x_i]\,[X_j^{s,\,x}(s+h)-x_j]+$$
$$+b_i(s,\,x)\,x_j+b_j(s,\,x)\,x_i. \tag{5.9}$$

Сравнивая (5.8), (5.9), приходим к формуле

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\,\mathsf{M}\,[X_i^{s,\,x}(s+h)-x_i]\,[X_j^{s,\,x}(s+h)-x_j]=a_{ij}(s,\,x). \tag{5.10}$$

Вероятностный смысл вектора сноса и матрицы диффузии ясен теперь из формул (5.7), (5.10), которые могут быть переписаны в виде

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\,\mathsf{M}\,[X^{s,\,x}(s+h)-x]=b(s,\,x),$$
$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\,\mathsf{M}\,[X^{s,\,x}(s+h)-x]\,[X^{s,\,x}(s+h)-x]^*=A(t,\,x),$$

если векторы понимать как вектор-столбцы и обозначить через * знак транспонирования.

Для дальнейшего нам потребуется аналог формулы (5.5) для случайного момента времени t. Для того чтобы его получить, рассмотрим некоторую ограниченную область D пространства E_l. Обозначим τ_D момент первого выхода траектории процесса $X(t)$ из области D.

Лемма 5.1. *Пусть* $\sigma_r(t,\,s)$ — *непрерывная по совокупности аргументов функция* [1]), *а* $X(t)$ — *непрерывное с вероятностью* 1 *решение уравнения* (4.1). *Тогда для любой функции* $V(t,\,x)\in C_2$ *справедливо при* $t\geqslant s$ *равенство*

$$\mathsf{M}\,[V(\tau_D\wedge t,\,X(\tau_D\wedge t))-V(s,\,X(s))]=$$
$$=\mathsf{M}\int_s^{\tau_D\wedge t}LV(u,\,X(u))\,du. \tag{5.11}$$

[1]) Вместо этого можно потребовать выполнения любых других условий, обеспечивающих справедливость равенства (5.13).

Доказательство. Так как процесс $X(t)$ имеет стохастический дифференциал, то согласно формуле Ито при всех $t \geqslant s$ справедливо тождество

$$V(t, X(t)) - V(s, X(s)) \equiv \equiv \int_s^t LV(u, X(u))\, du + \sum_{r=1}^k G_r(t), \quad (5.12)$$

где

$$G_r(t) = \int_s^t \left(\sigma_r(u, X(u)), \frac{\partial V}{\partial x}(u, X(u))\right) d\xi_r(u).$$

Кроме того, случайная величина $\zeta = \tau_D \wedge t$ не зависит от будущего, $\zeta < t$, причем

$$\int_s^t \mathsf{M}\left(\left(\sigma_r(u, X(u)), \frac{\partial V}{\partial x}(u, X(u))\right)^2 \Big/ \mathcal{N}_s\right) du < \infty$$

(стоящая под знаком математического ожидания функция ограничена величиной $\max\limits_{x \in D,\, 0 \leqslant u \leqslant t} |\sigma_r(u, x)|^2 \left|\frac{\partial V}{\partial x}\right|^2$). Поэтому в силу леммы 3.1

$$\mathsf{M} G_r(\zeta) = 0. \quad (5.13)$$

Подставив в (5.12) вместо t случайную величину ζ и взяв математическое ожидание от обеих частей полученного равенства, придем с учетом (5.13) к требуемой формуле (5.11).

§ 6. Супермартингалы

Пусть $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathsf{P})$ — некоторое вероятностное пространство и $\mathfrak{A}_t \subset \mathfrak{A}$ — набор σ-алгебр событий из Ω, определенных при $t \geqslant 0$ и таких, что $\mathfrak{A}_s \subset \mathfrak{A}_t$ при $s < t$. Пусть $X(t) = X(t, \omega)$ — случайный процесс с конечным математическим ожиданием, причем величина $X(t)$ при иксированном t измерима относительно $\mathfrak{A}_t$. По аналогии с дискретным временем (см. § 1.5) пара $(X(t), \mathfrak{A}_t)$ называется супермартингалом, если для любых $s < t$

$$\mathsf{M}(X(t)/\mathfrak{A}_s) \leqslant X(s) \quad (\text{п. н.}). \quad (6.1)$$

Если неравенство в (6.1) заменить на равенство, то получим определение *мартингала*.

Очевидно, замечания 1.5.1, 1.5.2 остаются в силе и для мартингалов с непрерывным временем.

Простейшим примером мартингала является пара $(\xi(t), \mathcal{F}_t)$, где $\xi(t)$ — стандартный винеровский процесс, $\mathcal{F}_t$ — система σ-алгебр, введенная на стр. 79. Действительно, используя независимость $\xi(t) - \xi(s)$ от σ-алгебры $\mathcal{F}_s$ и свойства условного математического ожидания, получим

$$\mathsf{M}(\xi(t)/\mathcal{F}_s) = \mathsf{M}(\xi(t) - \xi(s))/\mathcal{F}_s) + \mathsf{M}(\xi(s)/\mathcal{F}_s) = \\ = \xi(s) \quad (\text{п. н.}).$$

Аналогичные рассуждения показывают, что мартингалом является и пара $(y(t), \mathcal{F}_t)$, где

$$y(t) = \int_0^t \sigma(s, \omega)\, d\xi(s),$$

если $\sigma(s, \omega)$ $\mathcal{F}_s$-измерима и $\int_0^t \mathsf{M}\sigma^2(s, \omega)\, ds < \infty$ при $t > 0$.

Для мартингалов с непрерывным временем справедлива следующая

Теорема 6.1. *Если $(X(t), \mathfrak{A}_t)$ — неотрицательный сепарабельный супермартингал, то с вероятностью 1 существует конечный предел $\lim\limits_{t\to\infty} X(t) = \xi(\omega)$.*

Доказательство. Пусть $t_1 < t_2 < \ldots$ $\ldots < t_n < \ldots$ — произвольная неограниченная последовательность действительных чисел. Тогда, поскольку $(X(t_n), \mathfrak{A}_{t_n})$ — неотрицательный супермартингал с дискретным временем, то по теореме 1.5.1 существует с вероятностью 1 конечный предел

$$\lim_{n\to\infty} X(t_n) = \xi \quad (\text{п. н.}).$$

Пусть s_n — произвольная последовательность такая, что $s_n \to \infty$ при $n \to \infty$. Рассмотрим новую последовательность u_n, образованную из членов последовательностей t_n, s_n, расположенных в порядке возрастания. Тогда в силу уже доказанного $\lim\limits_{n\to\infty} X(u_n)=\zeta$ (п. н.) существует и конечен. При этом, поскольку t_n, s_n — подпоследовательности u_n, то $\zeta = \xi$, $\lim\limits_{n\to\infty} X(s_n) = \xi$ с вероятностью 1. Из сепарабельности процесса $X(t)$ вытекает (см. Дуб [1], гл. 2, теорема 2.3), что на самом деле множество $\Omega' \subset \Omega$ вероятности 1 можно выбрать так, что

$$\lim_{n\to\infty} X(s_n) = \xi$$

при $\omega \in \Omega'$ для любой последовательности $s_n \to \infty$.

Следствие 6.1. Если $X(t)$ — положительный супермартингал и при некотором $\alpha > 1$ функция $\mathsf{M}\,|X(t)|^\alpha$ ограничена, то

$$\lim_{t\to\infty} \mathsf{M}X(t) = \mathsf{M}X(\omega) = \mathsf{M}\lim_{t\to\infty} X(t).$$

Доказательство вытекает из теоремы 6.1 и леммы 1.2.1.

§ 7. Существование решений в целом

Из теоремы 4.1 вытекает, что при выполнении условий (4.3) для всех $t \geqslant t_0$, $x, y \in E_l$ решение $X(t)$ уравнения (4.1) определено и непрерывно при всех $t \geqslant t_0$. Однако условия (4.3) слишком ограничительны. Например, интуитивно ясно, что уравнение $dX = b(X)\,dt + d\xi(t)$ имеет при любом начальном условии $X(0) = x \in E_1$ решение, определенное при всех $t \geqslant 0$, если коэффициент сноса $b(x)$ — достаточно гладкая функция, отрицательная при $x > 0$ и положительная при $x < 0$. Тем не менее, условия (4.3) выполнены для этого уравнения лишь в каждой ограниченной по x области, если $|b(x)|$ растет быстрее линейной функции. Поэтому важно получить более общие условия существования и единственности решения уравнения (4.1).

Предположим, что условие (4.3′) выполнено в каждой ограниченной по (t, x) области. Тогда можно построить такие последовательности функций $b_n(t, x)$, $\sigma_r^{(n)}(t, x)$, что при $|x| < n$, $t_0 \leqslant t \leqslant n$

$$b_n(t, x) = b(t, x), \qquad \sigma_r^{(n)}(t, x) = \sigma_r(t, x)$$

и для каждого n функции $b_n(t, x)$, $\sigma_r^{(n)}(t, x)$ удовлетворяют условиям (4.3) при всех $n \geqslant t \geqslant t_0$, $x, y \in E_l$. Поэтому согласно теореме 4.1 существует последовательность марковских процессов $X_n(t)$, каждый из которых является с вероятностью единица единственным непрерывным решением уравнения

$$dX(t) = b_n(t, X(t))\,dt + \sum_{r=1}^{k} \sigma_r^{(n)}(t, X(t))\,d\xi_r(t)$$

на отрезке $[t_0, n]$. Ограничимся далее простейшим случаем, когда распределение $X(t_0)$ сосредоточено в некоторой ограниченной области. Обозначим $\tau_n = n \wedge \inf\{t\colon |X_n(t)| \geqslant n\}$. Тогда при $m \geqslant n$ процессы $X_n(t)$ и $X_m(t)$ совпадают до момента τ_n, т. е.

$$\mathsf{P}\{\sup_{t_0 \leqslant t \leqslant \tau_n} |X_n(t) - X_m(t)| = 0\} = 1.$$

Так как последовательность τ_n монотонно возрастает, то она имеет при $n \to \infty$ предел τ (конечный или бесконечный). Если

$$\mathsf{P}\{\tau = \infty\} = 1, \tag{7.1}$$

то процесс $\bar{X}(t)$, совпадающий с $X_n(t)$ при $t < \tau_n$, определен при всех $t > t_0$ и удовлетворяет при всех $t > t_0$ уравнению (4.1). Если же с положительной вероятностью $\tau < \infty$, то уравнение (4.1) и начальное условие не определяет однозначно процесса (нужно указать дополнительно, «что делает» траектория после ухода на бесконечность). В остальной части книги мы всегда будем иметь дело с процессами, однозначно определяемыми уравнением и начальным условием, т. е. с процессами, для которых выполнено условие (7.1). Такие процессы мы иногда будем называть *регулярными*, а условие (7.1) — *условием регулярности*. Достаточное условие регулярности содержится в следующей теореме.

Теорема 7.1. *Пусть функции $b(t, x)$, $\sigma_r(t, x)$ непрерывны по (t, x), $t \geqslant t_0$, $x \in E_l$, в каждой ограниченной по $t \geqslant t_0$, $x \in E_l$ области выполнены условия (4.3′) и существует неотрицательная функция $V(t, x) \in C_2$, для которой*

$$LV \leqslant cV, \qquad c = \text{const}, \tag{7.2}$$

$$V_R = \inf_{|x| \geqslant R,\ t \geqslant t_0} V(t, x) \to \infty \text{ при } R \to \infty. \tag{7.3}$$

Тогда для любого $T \geqslant t_0$ справедливы утверждения 1), 2) *теоремы* 4.1 *и неравенство*

$$\mathsf{M}V(t, X(t)) \leqslant \exp\{c(t-t_0)\}\,\mathsf{M}V(t_0, X(t_0)), \tag{7.4}$$

если математическое ожидание в правой части (7.4) *существует.*

Доказательство. В силу сказанного выше достаточно показать справедливость (7.1). С этой целью рассмотрим функцию

$$W(t, x) = \exp\{-c(t-t_0)\}\,V(t, x).$$

Из условия (7.2) вытекает, что $LW \leqslant 0$. Отсюда, согласно лемме 5.1, имеем:

$$\mathsf{M}\exp\{-c(\tau_n \wedge t - t_0)\}\,V(\tau_n \wedge t, \tilde{X}(\tau_n \wedge t)) - \\ - \mathsf{M}V(t_0, X(t_0)) = \mathsf{M}\int_{t_0}^{\tau_n \wedge t} LW(u, \tilde{X}(u))\,du \leqslant 0,$$

если $t \leqslant n$.
Поэтому с учетом неравенств $\tau_n \wedge t \leqslant t$, $V \geqslant 0$,

$$\mathsf{M}V(\tau_n \wedge t, \tilde{X}(\tau_n \wedge t)) \leqslant \exp\{c(t-t_0)\}\,\mathsf{M}V(t_0, X(t_0)). \tag{7.5}$$

Из (7.5) вытекает, что

$$\mathsf{P}\{\tau_n \leqslant t\} \leqslant \frac{\exp\{c(t-t_0)\}\,\mathsf{M}V(t_0, X(t_0))}{\inf\limits_{u>t_0,\ |x|\geqslant n} V(u, x)}.$$

Переходя к пределу при $n \to \infty$ и принимая во внимание (7.3), получим (7.1). Таким образом, процесс $\tilde{X}(t)$ является решением уравнения (4.1) при всех $t \geqslant t_0$. Это решение единственно с точностью до стохастической эквивалентности в сильном смысле (см. стр. 83). Действительно, пусть $X(t)$, $Y(t)$ — два решения уравнения (4.1). Из единственности решения в области $|x| < n$ вытекает, что

$$\mathsf{P}\{\sup_{t_0<t<\tau_n} |X(t) - Y(t)| = 0\} = 1.$$

Отсюда, переходя к пределу при $n \to \infty$ и учитывая (7.1), получим требуемое. Для завершения доказательства теоремы достаточно заметить, что неравенство (7.4) является тривиальным следствием (7.1) и (7.5).

Задача 7.1. Показать, что при выполнении условий (4.3) всюду в E_l для любого $n > 0$ справедлива оценка

$$\mathsf{M} \mid X(t) \mid^n \leqslant \exp\{c_n (t - t_0)\} \mathsf{M} \mid X(t_0) \mid^n,$$

где c_n — некоторая постоянная.

Задача 7.2. Показать, что если условие (4.3') выполнено в каждой ограниченной по t, x области и, кроме того,

$$| b(t, x) | < B (1 + | x | \ln | x |),$$

$$\sum_{r=1}^{k} | \sigma_r (t, x) |^2 < B (1 + | x |^2 \ln | x |),$$

то решения уравнения (4.1) регулярны.

Указание. Воспользоваться вспомогательной функцией $V(x) = \ln (1 + | x |^2)$.

В дальнейшем при рассмотрении стохастических дифференциальных уравнений Ито (4.1), описывающих марковские случайные процессы, мы всегда будем предполагать выполненными следующие условия, которые для удобства ссылок назовем условиями (B):

B.1. Функции $b(t, x)$, $\sigma_r (t, x)$, $r = 1, \ldots, k$, непрерывны по (t, x), $t \geqslant 0$, $x \in E_l$.

B.2. Для каждой ограниченной области D из $E_l \times [0, \infty)$ найдется такая постоянная K_D, что в этой области

$$| b(u, x) - b(u, y) | + \sum_{r=1}^{k} | \sigma_r (u, x) - \sigma_r (u, y) | \leqslant K_D | x - y |.$$

§ 8. Выход из области. Сходимость траекторий

В этом параграфе на основании связи между марковскими процессами $X(t)$, удовлетворяющими уравнению (4.1), и супермартингалами изучаются условия, при которых траектории $X(t)$ выходят с вероятностью 1 за конечное время из области $D \subset E_l$, а также более общие и важные для дальнейших приложений условия, гарантирующие сходимость $X(t)$ п. н. к множеству $E_l \setminus D$ при $t \to \infty$. При этом мы будем рассматривать лишь непрерывные с вероятностью 1 регулярные решения уравнения (4.1) (см. § 7) и обозначать, как обычно, через L производящий дифференциальный оператор процесса $X(t)$, так что

$$L=\frac{\partial}{\partial t}+\left(b(t, x), \frac{\partial}{\partial x}\right)+\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{k}\left(\sigma_r(t, x), \frac{\partial}{\partial x}\right)^2.$$

Большая часть результатов этого параграфа по формулировкам и методам доказательства весьма близка к результатам §§ 2.5 и 2.7. Поэтому многие доказательства будут лишь намечены. Обозначим через $\mathcal{N}_t$ σ-алгебру, порожденную случайными величинами $X(u, \omega)$, $u \leqslant t$. Положим также $\tau_D=\inf\{t: X(t) \bar{\in} D\}$ — момент первого выхода $X(t)$ из области $D \subset E_l$ ($\tau_D \equiv \infty$ в том случае, когда D совпадает с E_l).

Лемма 8.1. *Если неотрицательная функция $V(t,x) \in C_2$ в области $t \geqslant t_0$, $x \in D$, причем $LV \leqslant 0$ в этой области, а $\mathsf{M}V(t_0, X(t_0)) < \infty$, то $(Y(t)=V(\tau_D \wedge t, X(\tau_D \wedge t)), \mathcal{N}_t)$ — супермартингал.*

Доказательство. Обозначим, как и выше, τ_n момент первого выхода траектории $X(t)$ из области $|x| < n$. Тогда, в силу леммы 5.1, при $s \geqslant t_0$

$$\mathsf{M}(V(\tau_D \wedge \tau_n \wedge t, X(\tau_D \wedge \tau_n \wedge t))/\mathcal{N}_s) \leqslant V(s, X(s)).$$

Так как процесс $X(t)$ регулярен, то $\tau_n \to \infty$ при $n \to \infty$ п. н. Поэтому, применяя лемму Фату, получим

$$\mathsf{M}(V(\tau_D \wedge t, X(\tau_D \wedge t))/\mathcal{N}_s) \leqslant V(s, X(s)).$$

Отсюда вытекает, что для почти всех траекторий, для которых $\tau_D \geqslant s$ и, значит, $X(\tau_D \wedge s)=X(s)$, выполнено неравенство $\mathsf{M}(Y(t)/\mathcal{N}_s) \leqslant Y(s)$. Если же $\tau_D < s$, то для почти всех траекторий справедливо равенство $\mathsf{M}(Y(t)/\mathcal{N}_s)=Y(s)$, так как в этом случае $\tau_D \wedge s = \tau_D \wedge t=\tau_D$. Лемма доказана.

Следствие 8.1. Если $V(t, x) \in C_2$, $V(t, x) \geqslant 0$, $LV(t, x) \leqslant 0$ при $t \geqslant t_0$, $x \in E_l$, $\mathsf{M}V(t_0, X(t_0)) < \infty$, а $X(t)$ — регулярное решение уравнения (4.1), то $(V(t, X(t)), \mathcal{N}_t)$ — супермартингал.

Для процессов с непрерывным временем справедливы утверждения о выходе траекторий из области, аналогичные приведенным в § 2.5 для процессов с дискретным временем. Читатель без труда получит эти утверждения, решив следующие задачи.

Задача 8.1. Пусть существует неотрицательная функция $V(t, x) \in C_2$, для которой [1])

$$LV(t, x) \leqslant -\alpha(t) \tag{8.1}$$

при $t \geqslant t_0$, $x \in D$, причем

$$\alpha(t) > 0, \quad \int_{t_0}^{\infty} \alpha(u)\, du = \infty. \tag{8.2}$$

Доказать, что если процесс $X(t)$ регулярен, то он с вероятностью 1 выходит из области D за конечное время.

Задача 8.2. Пусть B — некоторое множество из E_l и существует неотрицательная функция $V(t, x) \in C_2$, для которой

$$LV(t, x) \leqslant -\alpha(t)\, \varphi(t, x), \qquad t \geqslant t_0, \quad x \in E_l,$$

где $\alpha(t)$ удовлетворяет условиям (8.2), а $\varphi(t, x)$ — условию (2.5.6) при всех $\varepsilon > 0$ и некотором $Q = Q(\varepsilon)$. Доказать, что для любых $s \geqslant t_0$, $x \in E_l$

$$\mathsf{P}\{\varliminf_{t \to \infty} \rho(X^{s,x}(t), B) = 0\} = 1.$$

Задача 8.3. Пусть существует функция $V(t, x) \geqslant 0$, $V(t, x) \in C_2$, для которой

$$\inf_{t \geqslant t_0} V(t, x) = \underset{\sim}{V}(x) \to \infty \text{ при } |x| \to \infty,$$

$$LV(t, x) \leqslant -\alpha(t)\, \varphi(t, x), \qquad t \geqslant t_0, \quad x \in E_l,$$

где $\varphi \in \Phi(B)$, а $\alpha(t)$ удовлетворяет условиям (8.2). Доказать, что тогда для любых $s \geqslant t_0$, $x \in E_l$

$$\mathsf{P}\{\sup_{t \geqslant s} |X^{s,x}(t)| = R(\omega) < \infty\} = 1, \tag{8.3}$$

$$\mathsf{P}\left\{\int_{t_0}^{\infty} \alpha(u)\, \varphi(u, X^{s,x}(u))\, du < \infty\right\} = 1, \tag{8.4}$$

$$\mathsf{P}\{\varliminf_{t \to \infty} \rho(X^{s,x}(t), B) = 0\} = 1. \tag{8.5}$$

---

[1]) Здесь и ниже при рассмотрении функций $f(t)$ непрерывного аргумента t мы предполагаем их ограниченность на любом компакте.

Показать также, что это утверждение остается в силе, если неравенство $LV(t, x) \leqslant -\alpha(t)\varphi(t, x)$ заменить соотношениями

$$LV(t, x) \leqslant g(t)[1 + V(t, x)] - \alpha(t)\varphi(t, x),$$

$$g(t) > 0, \quad \int_{t_0}^{\infty} g(t)\,dt < \infty.$$

Указание. Убедиться, что процесс $X^{s,x}(t)$ регулярен, а $V(t, X^{s,x}(t))$ — супермартингал. Пользуясь вытекающим из формулы Ито равенством

$$\mathsf{M}V(\tau_n \wedge t, X^{s,x}(\tau_n \wedge t)) - V(s, x) = \mathsf{M}\int_{s}^{\tau_n \wedge t} LV\,du$$

и леммой Фату, вывести неравенство

$$\mathsf{M}V(t, X^{s,x}(t)) \leqslant \mathsf{M}\int_{s}^{t} LV\,du + V(s, x).$$

Далее воспользоваться методом доказательства теоремы 2.5.2.

Приведем теперь условия, при которых можно гарантировать сходимость процесса $X^{s,x}(t)$ к множеству B не только по некоторой подпоследовательности моментов времени t_n, но и при $t \to \infty$.

Теорема 8.1. *Пусть существует неотрицательная функция $V(t, x) \in C_2$, $t \geqslant t_0$, $x \in E_l$ и множество B, для которых*

$$\inf_{t \geqslant t_0} V(t, x) = \underset{\sim}{V}(x) \to \infty \quad \text{при} \quad |x| \to \infty, \tag{8.6}$$

$$\left.\begin{aligned} & LV \leqslant g(t)[1 + V(t, x)] - \alpha(t)\varphi(t, x), \\ & \varphi \in \Phi(B), \quad g(t) > 0, \quad \int_{t_0}^{\infty} g(t) < \infty, \\ & \alpha(t) > 0, \quad \int_{t_0}^{\infty} \alpha(t)\,dt = \infty. \end{aligned}\right\} \tag{8.7}$$

Пусть, далее, выполнены условия

$$\underline{V}(x) > 0 \text{ при } x \overline{\in} B, \tag{8.8}$$
$$V(t, x) \equiv 0 \text{ при } x \in B,$$

и, более того,

$$\lim_{x \to B} \sup_{t \geqslant t_0} V(t, x) = 0. \tag{8.9}$$

Тогда процесс $X^{s, x}(t)$ при всех $s \geqslant t_0$, $x \in E_l$ сходится п. н. к множеству B при $t \to \infty$. Кроме того,

$$\lim_{t \to \infty} \mathsf{M} [V(t, X^{s, x}(t))]^\alpha = 0$$

для любого положительного $\alpha < 1$.

Доказательство полностью аналогично доказательству теоремы 2.7.1.

Теорема 8.2. *Пусть дано стохастическое уравнение в E_1*

$$dX(t) = \alpha(t) F(t, X(t))\, dt + \beta(t) \sigma(t, X(t))\, d\xi(t), \tag{8.10}$$

причем $F(t, x) = F(x) + q(t, x)$, $\gamma(t) = \sup\limits_{x \in E_1} |q(t, x)|$,

$$F(x)(x - x_0) < 0 \text{ при } x \neq x_0,$$

$$\alpha(t) > 0, \quad \int_{t_0}^{\infty} \alpha(t)\, dt = \infty, \quad \beta(t) > 0,$$

$$\int_{t_0}^{\infty} \alpha(t) \gamma(t)\, dt < \infty, \quad \int_{t_0}^{\infty} \beta^2(t)\, dt < \infty, \quad \sigma^2(t, x) \leqslant K(1 + x^2).$$

Тогда любое решение $X^{s, x}(t)$, $s \geqslant t_0$, $x \in E_l$ уравнения (8.10) сходится к x_0 п. н. при $t \to \infty$.

Эта теорема является простым следствием предыдущей при $V(t, x) = (x - x_0)^2$, $g(t) = 2\alpha(t)\gamma(t) + K_1\beta^2(t)$, где K_1 — достаточно большая постоянная, если под B понимать множество, состоящее из одной точки $x = x_0$.

Нетрудно видеть, что функции $V(t, x)$, удовлетворяющей условиям теоремы 8.1, может не существовать даже в самых простых случаях, если множество B многосвязно.

Пусть, например, дано уравнение

$$dX = (X - X^3)\, dt. \tag{8.11}$$

Его стационарными точками будут, очевидно, точки 0, $+1$, -1. Предположим, что мы построили функцию

$V(t, x)$, удовлетворяющую условиям теоремы 8.1 и гарантирующую сходимость любого решения $X^{s, x}(t)$ уравнения (8.11) к множеству B, состоящему из этих трех точек. Тогда $V(t, 0) = V(t, \pm 1) = 0$ при всех t. В силу условия (8.9) функция $V(t, x)$ равномерно относительно t непрерывна в точках $x = 0, +1, -1$, так что, в частности, для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что $\tilde{V}(x) < \varepsilon$ при $|x| \leqslant \delta$. Пусть теперь $x_0 \in (\delta, 1)$, s произвольны. Тогда найдется $s_0 = s_0(s) < s$, для которого $X^{s_0, \delta}(s) = x_0$.

Далее, нетрудно проверить (см. по этому поводу замечание 2.5.1) для функции

$$W(t, x) = (1 + V(t, x))\, e^{\int\limits_t^\infty g\, du}$$

неравенство $LW(t, x) \leqslant 0$. Поэтому

$$W(s, x_0) - W(s_0, \delta) = W(s, X^{s_0, \delta}(s)) - W(s_0, \delta) =$$
$$= \int\limits_{s_0}^{s} \frac{dW(u, X^{s_0, \delta}(u))}{du}\, du = \int\limits_{s_0}^{s} LW(u, X^{s_0, \delta}(u))\, du \leqslant 0$$

и, значит,

$$(1 + V(s, x_0)) \leqslant (1 + V(s_0, \delta))\, e^{\int\limits_{s_0}^{s} g\, du}.$$

Отсюда, принимая во внимание отмеченную выше равномерную непрерывность, имеем

$$V(s, x_0) \leqslant (1 + \varepsilon)\, e^{\int\limits_{s_0}^{s} g\, du} - 1.$$

Наконец, замечая, что $s_0 = s_0(s) \to \infty$ при $s \to \infty$, и учитывая произвольность ε в последнем неравенстве, получим $\tilde{V}(x_0) \equiv 0$ для всех $x_0 \in (\delta, 1)$, что противоречит условию (8.8).

Конечно, если в качестве множества B в этом примере взять весь отрезок $[-1, 1]$, то функцию V с требуемыми в условии теоремы 8.1 свойствами легко построить. Однако таким образом удастся доказать лишь, что все траектории системы (8.10) притягиваются к множеству $[-1, 1]$.

Это дает довольно грубую информацию об истинном поведении траекторий. Поэтому сейчас будет приведена другая теорема о сходимости, удобная в тех случаях, когда B — многосвязное множество.

Именно, рассмотрим стохастическое дифференциальное уравнение в виде

$$dX(t) = \alpha(t) F(t, X(t))\, dt + \sum_{r=1}^{k} \sigma_r(t, X(t))\, d\xi_r(t), \qquad (8.12)$$

где $F(t, x) = F(x) + q(t, x)$, $\sigma_r(t, x)$ — векторы из E_l, $\alpha(t)$ — некоторая положительная функция.

Производящий оператор L марковского случайного процесса (8.12) имеет, очевидно, вид

$$L = \frac{\partial}{\partial t} + \alpha(t) \left(F(t, x), \frac{\partial}{\partial x} \right) + \frac{\beta^2(t)}{2} \sum_{r=1}^{k} \left(\sigma_r(t, x), \frac{\partial}{\partial x} \right)^2. \qquad (8.13)$$

Теорема 8.3. *Пусть $X^{s,x}(t)$, $s \geqslant t_0$, $x \in E_l$ — решение уравнения (8.12) и множество $B = \{x : F(x) = 0\}$ состоит из конечного числа связных компонент. Пусть, далее, функция $\alpha(t)$ и некоторая функция $V(t, x) \in C_2$ удовлетворяют при $t \geqslant t_0$, $x \in E_l$ условиям (8.6), (8.7), и, кроме того,*

$$\int_{t_0}^{\infty} \alpha(t) \gamma(t) < \infty, \qquad \gamma(t) = \sup_{x \in E_l} |q(t, x)|,$$

$$\sup_{t \geqslant t_0,\ |x| < \rho} |F(t, x)| = \widetilde{F}(\rho) < \infty,$$

$$\int_{t_0}^{\infty} \sum_{r=1}^{k} \mathsf{M} |\sigma_r(u, X^{s,x}(u))|^2\, du < \infty. \qquad (8.14)$$

Тогда $X^{s,x}(t)$ с вероятностью 1 сходится либо к одной из точек множества B, либо к границе одной из его связных компонент.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 2.7.3. Следующая задача содержит достаточные условия, при которых выполнено соотношение (8.14).

Задача 8.4. Показать, что неравенство (8.14) выполнено, если

$$\sum_{r=1}^{k} |\sigma_r(t, x)|^2 \leqslant g_1(t)\,[1 + V(t, x)],$$

где $V(t, x)$ — функция, входящая в условия теоремы 8.3, а $g_1(t)$ интегрируема на $[t_0, \infty]$.

В заключение этого параграфа приведем пример, в котором реализуется вторая возможность, указанная в заключение теоремы 8.3.

Рассмотрим в E_2 следующую систему уравнений в полярных координатах (r, φ):

$$\frac{d\varphi}{dt} = \psi(r), \qquad \frac{dr}{dt} = -\psi^2(r), \tag{8.15}$$

где

$$\psi(r) = \begin{cases} (r-1) & \text{при} \quad r \geqslant 1, \\ 0 & \text{при} \quad 0 \leqslant r < 1. \end{cases}$$

Для системы (8.15) выполнены все условия теоремы 8.2, если $V = r^2 = x_1^2 + x_2^2$, причем $B = \{r\colon r \leqslant 1\}$, $\alpha(t) \equiv 1$, $q(t, x) \equiv 0$, $g(t) \equiv 0$.

Очевидно, решение $(r(t), \varphi(t))$ этого уравнения с начальным условием (φ_0, r_0), $r_0 > 1$, заданным при $t = s \geqslant 0$, имеет вид

$$r(t) = 1 + \frac{r_0 - 1}{1 + (r_0 - 1)(t - s)},$$

$$\varphi(t) = \varphi_0 + \ln(1 + (r_0 - 1)(t - s)). \tag{8.16}$$

Из (8.16) ясно, что любое такое решение «наворачивается» на окружность $r = 1$ с ростом t.

Г Л А В А 4

СХОДИМОСТЬ ПРОЦЕДУР СТОХАСТИЧЕСКОЙ АППРОКСИМАЦИИ. I

Вводится важный класс статистических процедур для отыскания корня уравнения регрессии — процедур стохастической аппроксимации Роббинса — Монро (процедур с. а. РМ). Устанавливаются условия сходимости этих процедур. Рассматриваются также процедуры с. а. для отыскания максимума функции регрессии, предложенные Кифером и Вольфовицем (процедуры с. а. КВ). Изложение ведется параллельно для случаев непрерывного и дискретного времени.

§ 1. Процедура Роббинса — Монро

Пусть $R(x)$ — некоторая неизвестная функция, значения которой могут быть измерены в любой точке $x \in E_1$. Относительно функции $R(x)$ имеются лишь сведения общего характера, касающиеся, например, ее непрерывности, монотонности и т. д. Известно, в частности, что уравнение

$$R(x) = 0 \tag{1.1}$$

имеет единственное решение x_0.

Задача состоит в том, чтобы по результатам измерения $R(x)$ найти величину x_0. Точнее, мы хотим выбрать план, по которому следует производить эксперимент, т. е. указать, в каких точках $X(t) \in E_1$ в моменты времени $t = 1, 2, \ldots$ нужно измерять функцию $R(x)$ так, чтобы $X(t) \to x_0$ при $t \to \infty$.

Методы решения этой задачи существенно зависят от того, можно ли в условиях эксперимента пренебречь погрешностью измерений функции $R(x)$. Если это можно сделать, то существуют очень быстро (быстрее геометрической прогрессии) сходящиеся методы нахождения x_0, например, метод касательных Ньютона.

Если влияние ошибок измерения существенно, то принципиально невозможно построить столь быстро сходящиеся методы решения уравнения (1.1) и приходится ограничиваться более медленно сходящимися процедурами, к построению которых мы и переходим.

Естественно ограничиться независимыми во времени наблюдениями функции $R(x)$ и считать, что ошибка измерения имеет нулевое среднее и зависит, вообще говоря, от той точки, где данное измерение проводилось. Тогда, если $Y_{t+1}(X(t), \omega)$ — результат измерения в точке $X(t)$ в момент времени $t+1$, то в простейшей ситуации

$$Y_{t+1}(X(t), \omega) = \\ = R(X(t)) + G(t+1, X(t), \xi(t+1, \omega)), \quad (12)$$

где $\xi(t, \omega)$ — последовательность независимых случайных величин, определенных на некотором вероятностном пространстве $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathsf{P})$, причем $\mathsf{M}G(t, x, \xi(t, \omega)) = 0$ при любых $x \in E_1$, $t = 1, 2, 3, \ldots$, $G(t, x, y)$ — неизвестная функция переменных t, x, y.

Поставленная выше задача сводится, таким образом, к тому, чтобы по наблюдениям (1.2) определить величину x_0. Для решения этой задачи Роббинс и Монро в 1951 г. в основополагающей работе [1] предложили план эксперимента, где точки $X(t)$, в которых следует производить измерения неизвестной функции $R(x)$, выбираются согласно следующему рекуррентному соотношению

$$X(t+1) - X(t) = a(t)\, Y_{t+1}(X(t), \omega), \; X(0) = x. \quad (1.3)$$

Здесь $a(t)$ — некоторая последовательность положительных чисел, удовлетворяющая условиям

$$\sum_{t=0}^{\infty} a(t) = \infty, \qquad \sum_{t=0}^{\infty} a^2(t) < \infty. \quad (1.4)$$

В [1], в частности, было показано, что если $R(x)$ — монотонно убывающая непрерывная ограниченная функция, а математические ожидания случайных величин $G^2(t, x, \xi(t, \omega))$ ограничены равномерно по t, x, то

$\mathsf{M}\,|X(t)-x_0|^2 \to 0$ при $t \to \infty$ для любой начальной точки $x = X(0) \in E_1$.

Поясним кратко смысл условий (1.4). Первое из этих условий необходимо для сходимости $X(t)$ к x_0 при $t \to \infty$ даже в отсутствие случайных ошибок. Действительно, если $G(t, x, \xi(t, \omega)) \equiv 0$, а ряд $\sum\limits_{t=0}^{\infty} a(t)$ сходится, то, как вытекает из (1.3),

$$\sum_{t=0}^{\infty} |X(t+1) - X(t)| \leqslant \sum_{t=0}^{\infty} a(t)\,|R(X(t))| < C,$$

где постоянная C не зависит от $x = X(0)$, т. е. сумма приращений $X(t+1) - X(t)$ конечна. Поэтому величина $X(t)$ при $t \to \infty$ не достигнет точки x_0, если, например, начальная точка x выбрана достаточно далеко от x_0.

Таким образом, для сходимости процедуры (1.3) к x_0 даже в отсутствие помех необходимо, чтобы ряд $\sum\limits_{t=0}^{\infty} a(t)$ расходился, т. е. чтобы $a(t)$ были не слишком малыми.

С другой стороны, величины $a(t)$ должны быть не слишком большими, иначе случайные ошибки нарушат эту сходимость. Оказывается, что условие $\sum\limits_{t=0}^{\infty} a^2(t) < \infty$ погасит асимптотически влияние случайных ошибок эксперимента[1]), так как при выполнении этого условия

$$|a(t)\,G(t+1, X(t), \xi(t+1, \omega))| \to 0 \text{ при } t \to \infty$$

с вероятностью 1, поскольку

$$\mathsf{M}\Big(\sum_{t=0}^{\infty} a(t)\,G(t+1, X(t), \xi(t+1, \omega))\Big)^2 = \\ = \mathsf{M}\sum_{t=0}^{\infty} a^2(t)\,G^2(t+1, X(t), \xi(t+1, \omega)) < \infty$$

(см. второе следствие из теоремы Фубини, стр. 33).

Заметим, далее, что согласно процедуре (1.3) для вычисления каждой последующей точки $X(t+1)$ достаточно

---

[1]) Впрочем, это условие можно ослабить; см., например, теорему 4.5, а также примечание к ней на стр. 295.

знать лишь предшествующую точку $X(t)$ и не нужно знать точки, в которых эксперимент производился ранее. (В этом заключается практическая ценность этой процедуры, так как для ее реализации можно применять, например, вычислительные машины, не обладающие большой памятью.) С математической точки зрения последнее означает, что процесс $X(t)$, определяемый соотношением (1.3), является марковским. Формально это вытекает из результатов § 2.3, поскольку рекуррентное соотношение (1.3) является частным случаем соотношения (2.3.1).

Однако для описания независимых измерений функции $R(x)$ можно рассмотреть более общую, чем (1.2), конструкцию, приводящую к рекуррентному соотношению типа (2.3.4). Точнее, будем считать, что результат измерения функции $R(x)$ в точке $X(t)$ в момент времени $t+1$ представляет собой случайную величину

$$Y_{t+1}(X(t), \omega) = R(X(t)) + G(t+1, X(t), \omega),$$

где $\mathsf{M}G(t, x, \omega) \equiv 0$, причем функция

$$\Phi(t, x, \omega) = R(x) + G(t, x, \omega)$$

удовлетворяет условиям (А) § 2.3.

В соответствии со сказанным выше, для решения уравнения (1.1) рассмотрим рекуррентное соотношение

$$X(t+1) - X(t) =$$
$$= a(t)(R(X(t)) + G(t+1, X(t), \omega)), \quad t \geqslant 0, \quad (1.5)$$

которое является несколько более общим, чем (1.3).

Согласно § 2.3 соотношение (1.5) определяет марковский случайный процесс $X^{s,x}(t)$, $t \geqslant s$, удовлетворяющий начальному условию $X^{s,x}(s) = x$ ($s = 0, 1, 2, \ldots$ $\ldots, x \in E_1$). Всюду в дальнейшем мы для простоты ограничимся случаем, когда начальное условие задается в момент времени $s = 0$, т. е. будем рассматривать марковский процесс $X^x(t) = X^{0,x}(t)$, хотя все приводимые ниже теоремы о сходимости остаются справедливыми и для процесса $X^{s,x}(t)$ при любом $s = 0, 1, 2, \ldots$

Очевидно, производящий оператор L (см. § 2.2) процесса $X^x(t)$ действует на функцию $V(t, x) \in D_L^{t,x}$ по формуле

$$LV(t, x) = \mathsf{M}V(t+1, x + a(t)(R(x) + G(t+1, x, \omega))) - V(t, x). \quad (1.6)$$

Следующая теорема, принадлежащая Гладышеву [1], обобщает сформулированный выше результат Роббинса и Монро. Эта теорема показывает, что если относительно функций $R(x)$, $G(t+1, x, \omega)$ имеются лишь некоторые априорные сведения общего характера, процедура (1.5) может быть применена для решения уравнения (1.1).

Теорема 1.1. *Пусть выполнены неравенства*

1) $\sup\limits_{\varepsilon < |x - x_0| < 1/\varepsilon} R(x)(x - x_0) < 0$ *для любого* $\varepsilon > 0$, (1.7)

2) $R^2(x) + \mathsf{M}G^2(t, x, \omega) \leqslant K(1 + x^2)$, $K = \text{const}$ (1.8)

и соотношения (1.4). *Тогда для любого* $x \in E_1$ *процесс* $X^x(t)$, *определяемый с помощью* (1.5), *сходится с вероятностью* 1 *при* $t \to \infty$ *к корню* x_0 *уравнения* (1.1), *т. е.*

$$\mathsf{P}\{\lim_{t\to\infty} X^x(t) = x_0\} = 1.$$

Эта теорема вытекает из теоремы 2.7.2 при $F(t, x) = F(x) = R(x)$, $\alpha(t) = \beta(t) = a(t)$, $\gamma(t) = 0$.

До сих пор мы предполагали, что $R(x)$ — числовая функция. Однако точно так же можно рассмотреть и задачу нахождения решения системы уравнений $R(x) = 0$, где x, $R(x)$ — векторы из E_l, причем значения $R(x)$ известны лишь с некоторой ошибкой. В этом случае аналогом процедуры стохастической аппроксимации Роббинса — Монро будет являться, очевидно, процедура, описываемая рекуррентным соотношением

$$X(t+1) - X(t) = a(t)(R(X(t)) + G(t+1, X(t), \omega)). \quad (1.9)$$

Здесь $\mathsf{M}G(t, x, \omega) = 0$ для любых $t = 1, 2, \ldots, x \in E_l$, а функция $\Phi(t, x, \omega) = R(x) + G(t, x, \omega)$ удовлетворяет условиям (А) § 2.3.

Теоремы о сходимости процедуры (1.9) даны ниже, в §§ 4 и 5.1.

Замечание 1.1. Обычно (см. Роббинс и Монро [1]) задачу с. а. ставят в несколько другой форме. А именно, рассматривают некоторую случайную величину $Y(x, \omega)$, зависящую от параметра x. При разных x эти случайные величины заданы, вообще говоря, на разных вероятностных пространствах $(\Omega_x, \mathfrak{A}_x, \mathsf{P}_x)$. Функцию $R(x) = \mathsf{M}_x Y(x, \omega)$ называют функцией регрессии. В каждый момент $t+1$ экспериментатор может произвести «наблюдение» $\tilde{Y}_{t+1}(X(t), \omega)$ этой случайной величины в любой точке $X(t)$, причем условное распределение $\tilde{Y}_{t+1}$ при фиксированных $X(0) = x, X(1) = x_1, \ldots, X(t) = x_t$ совпадает с распределением $Y(x_t, \omega)$. Требуется организовать план наблюдения таким образом, чтобы найти корень уравнения регрессии $R(x) = 0$. Решение этой задачи дается процедурой

$$X(t+1) - X(t) = a(t)\tilde{Y}_{t+1}(X(t), \omega). \quad (1.10)$$

Нетрудно видеть из (1.10), что распределение процесса $X(t)$ однозначно определяется начальным распределением вектора $X(0)$ и функций $Q_x(A) = \mathsf{P}_x\{Y(x, \omega) \in A\}$, $A \in \mathfrak{B}_l$. Очевидно, то же самое распределение имеет и рассмотренный выше (см. (1.5)) процесс $X(t)$, для которого

$$X(t+1) - X(t) = a(t) Y_{t+1}(X(t), \omega),$$

если случайные величины $Y_t(x, \omega)$ таковы, что

$$\mathsf{P}\{Y_t(x, \omega) \in A\} = Q_x(A).$$

Связанная с (1.10) постановка задачи несколько общее, так как в ней не требуется, чтобы случайные величины $Y(x, \omega)$ были заданы на одном и том же вероятностном пространстве. Однако на самом деле эта общность довольно иллюзорна, так как мы всегда можем поместить их в одно вероятностное пространство. Заметим также, что иногда в условия теорем могут входить требования на совместные распределения процесса (поля) $Y(x, \omega)$ при различных x, которые могут быть не заданы (см., например, неравенство (6.6.10) теоремы 6.6.3). В этом случае достаточно, чтобы эти требования были выполнены при каком-нибудь совместном распределении $Y(x, \omega)$, согласованном с $Q(x, A)$. Подчеркнем еще раз, что в большей части приложений метода с. а. уже по условию задачи часто известен процесс (поле) $Y(x, \omega)$ как функция x. Например, часто $Y(x, \omega) = R(x) + G(x)\xi(\omega)$.

§ 2. Процедура Кифера — Вольфовица

В 1952 г. Кифер и Вольфовиц [1], основываясь на идее стохастической аппроксимации Роббинса — Монро, изложенной в предыдущем параграфе, рассмотрели следующую задачу о нахождении максимума неизвестной функции.

Пусть $f(x)$, $x \in E_1$,— непрерывно дифференцируемая функция, имеющая единственный максимум в точке $x = x_0$. Пусть, далее, экспериментатор может производить независимые измерения $f(x)$ с некоторой ошибкой, так что результат измерения $Y_{t+1}(X(t), \omega)$ в точке $X(t) \in E_1$ в момент времени $t+1$ $(t = 0, 1, 2, \ldots)$ имеет вид

$$Y_{t+1}(X(t), \omega) = f(X(t)) + \varphi(t+1, X(t), \omega). \quad (2.1)$$

Задача состоит в нахождении точки максимума x_0 функции $f(x)$ или, что то же самое, в решении уравнения $f'(x) = 0$. Однако применить для решения этой задачи процедуру § 1 невозможно: ведь если ошибки в измерении функции $f(x)$ в различных точках независимы, то при попытке вычисления производной $f'(x)$ по результатам измерения ошибка становится бесконечно большой.

Если бы значения функции $f(x)$ измерялись без ошибки, то для нахождения максимума $f(x)$ можно было бы применить градиентный метод, описываемый рекуррентным соотношением

$$X(t+1) - X(t) = af'(X(t)), \quad (2.2)$$

где a — положительная постоянная.

Идея метода Кифера — Вольфовица состоит в том, чтобы вычислять в (2.2) приближенные значения производной как отношение приращения функции к приращению аргумента Δx, полагая $\Delta x = 2c(t) \to 0$ при $t \to \infty$ и одновременно «замедлять» движение $X(t)$ к x_0, делая параметр a зависящим от времени. При этом функция $a = a(t)$ должна быть выбрана так, чтобы, во-первых, последовательность $X(t)$ не остановилась слишком рано, а во-вторых, так, чтобы погасить влияние случайных помех. Нетрудно видеть, что даже при отсутствии помех условие

$$\sum_{t=0}^{\infty} a(t) = \infty \quad (2.3)$$

необходимо для того, чтобы решение (2.2) сходилось к x_0.

Для выполнения же второго требования часто достаточно (см. § 1) условия

$$\sum_{t=0}^{\infty}\left(\frac{a(t)}{c(t)}\right)^2<\infty. \qquad (2.4)$$

Согласно Киферу и Вольфовицу [1], следует измерять значения $f(x)$ в двух точках $x+c(t)$, $x-c(t)$ и заменять $f'(x)$ выражением $[f(x+c(t))-f(x-c(t))]/(2c(t))$. При этом разность $[f(x+c(t))-f(x-c(t))]/2$ будет измерена с ошибкой $G(t+1, x, \omega)=[\varphi(t+1, x+c(t), \omega)-\varphi(t+1, x-c(t), \omega)]/2$. Таким образом, вместо (2.2) получаем рекуррентное соотношение

$$X(t+1)-X(t)=$$
$$=\frac{a(t)}{c(t)}\left(\frac{f(X(t)+c(t))-f(X(t)-c(t))}{2}+G(t+1, X(t), \omega)\right)=$$
$$=\Phi(t+1, X(t), \omega). \qquad (2.5)$$

По теореме 2.3.2 соотношение (2.5) при начальном условии $X(0)=x$ определяет марковский процесс $X^x(t)$ с производящим оператором

$$LV(t, x)=$$
$$=\mathsf{M}V\left(t+1, x+\frac{a(t)}{c(t)}\left(\frac{f(x+c(t))-f(x-c(t))}{2}+G(t, x, \omega)\right)\right)-$$
$$-V(t, x). \qquad (2.6)$$

Теорема 2.1. *Пусть $f'(x)$ непрерывна, удовлетворяет условию Липшица и, кроме того,*

1) $f'(x)(x-x_0)<0$ *при* $x\neq x_0$,

2) $|f'(x)|^2+\mathsf{M}G^2(t, x, \omega)\leqslant K(1+x^2)$,

3) $a(t)>0$, $\sum\limits_{t=0}^{\infty}a(t)=\infty$, $c(t)>0$,

$$\sum_{t=0}^{\infty}a(t)c(t)<\infty, \qquad \sum_{t=0}^{\infty}\frac{a^2(t)}{c^2(t)}<\infty,$$

4) *последовательность* $c(t)$ *ограничена.*

Тогда процесс $X^x(t)$, определяемый формулой (2.5), *сходится п. н. к точке x_0 при $t\to\infty$ для любого $x\in E_1$.*

Справедливость этой теоремы вытекает из теоремы 2.7.2, если положить $F(t, x)=[f(x+c(t))-f(x-c(t))]/(2c(t))$,

$F(x) = f'(x)$, $\alpha(t) = a(t)$, $\beta(t) = a(t)/c(t)$ и заметить, что, в силу условия Липшица,

$$\left| \frac{f(x+c(t)) - f(x-c(t))}{2c(t)} - f'(x) \right| \leqslant k_1 c(t).$$

Предположим теперь, что $f(x) = f(x_1, \ldots, x_l)$ — непрерывно дифференцируемая функция многих переменных со значениями из E_1, причем, по-прежнему, $f(x)$ не может быть измерена точно, так что результат измерения $Y_{t+1}(X(t), \omega)$ в точке $X(t) \in E_l$ в момент времени $t+1$ имеет вид (2.1). Требуется определить точку $x_0 \in E_l$, в которой $f(x)$ достигает максимума, если заранее известно, что такая точка существует и единственна, т. е. найти решение уравнения $\operatorname{grad} f(x) = 0$.

Как и выше, ошибка в вычислении градиента функции $f(x)$ будет бесконечно большой, и поэтому следует указать правило, по которому нужно измерять $f(x)$ с тем, чтобы получить приближенное значение этого градиента. По аналогии с изложенным методом естественно в каждый момент времени t производить измерения в $2l$ точках $x_i^{\pm} = x \pm c(t) e_i$, где e_i — вектор из E_l с координатами δ_{ij}, $j = 1, 2, \ldots, l$, а $c(t)$ — некоторая положительная функция. Тогда величину $\operatorname{grad} f(x)$ в точке x можно приближенно оценить по формуле

$$\operatorname{grad} f(x) \approx \frac{f_+(c(t), x) - f_-(c(t), x)}{2c(t)},$$

где $f_\pm(c(t), x)$ — вектор с координатами $f(x_i^{\pm})$, $i = 1, 2, \ldots, l$. При этом i-я координата вектора $[f_+(c(t), x) - f_-(c(t), x)]/2$, будет измерена с ошибкой $G_i(t+1, x, \omega) = [\varphi(t+1, x_i^+, \omega) - \varphi(t+1, x_i^-, \omega)]/2$.

Таким образом, многомерным аналогом процедуры Кифера — Вольфовица для нахождения максимума функции $f(x) = f(x_1, \ldots, x_l)$ многих переменных является процедура, описываемая следующим рекуррентным соотношением в E_l:

$$\begin{aligned} X(t+1) - X(t) &= \\ &= \frac{a(t)}{c(t)} \left[\frac{f_+(c(t), X(t)) - f_-(c(t), X(t))}{2} + G(t+1, X(t), \omega) \right] = \\ &= a(t) \nabla_c f(X(t)) + \frac{a(t)}{c(t)} G(t+1, X(t), \omega) = \\ &= \Phi(t+1, X(t), \omega), \qquad (2.7) \end{aligned}$$

где $\nabla_c f(x) = [f_+(c(t), x) - f_-(c(t), x)]/(2c(t))$, $a(t)$, $c(t)$ — некоторые последовательности положительных чисел, $G(t, x, \omega)$ — вектор с координатами $G_i(t, x, \omega)$, $i = 1, 2, \ldots, l$, $\mathsf{M}G(t, x, \omega) = 0$, причем функция $\Phi(t, x, \omega)$ удовлетворяет условиям (А) § 2.3.

Условия сходимости этой процедуры будут даны ниже, в §§ 5 и 5.1.

§ 3. Непрерывные процедуры

Мы рассмотрели выше задачу о нахождении корня x_0 уравнения (1.1), если значения функции $R(x)$ могли быть измерены в дискретные моменты времени $t = 1, 2, \ldots$ с некоторой ошибкой. Естественно, однако, рассмотреть также и случай непрерывного времени, когда результат измерения $Y_t(x, \omega)$ функции $R(x)$ в точке $x \in E_1$ и в момент времени t имеет вид

$$Y_t(x, \omega) = R(x) + G(t, x, \omega),$$

где $G(t, x, \omega)$ при фиксированном x — случайный процесс с непрерывным временем, имеющий нулевое математическое ожидание. Тогда непрерывным аналогом процедуры с. а. Роббинса — Монро будет являться процедура, описываемая уравнением

$$\frac{dX(t)}{dt} = a(t)\, Y_t(X(t), \omega). \tag{3.1}$$

В таком виде непрерывная процедура с. а. была предложена в работе Дримла и Недомы [1], где предполагалось, что $a(t) = a/t$, а $Y_t(x, \omega)$ при фиксированном x — процесс, удовлетворяющий закону больших чисел. Дальнейшее развитие непрерывных процедур с. а. см. в работах Сакрисона [1], Цыпкина [1], [2] (в последней работе имеется подробная библиография) и других.

Следуя замыслу этой книги, мы ограничимся случаем, когда

$$Y_t(X(t), \omega) = R(x) + \sigma(t, x)\, \dot{\xi}(t),$$

где $\dot{\xi}(t) = \dot{\xi}(t, \omega)$ — гауссовский белый шум, и будем интерпретировать уравнение (3.1) как стохастическое дифференциальное уравнение [1])

$$dX(t) = a(t)\,(R(X(t)) + \sigma(t, X(t))\,d\xi(t)),$$
$$X(0) = x. \tag{3.2}$$

Таким образом, мы получили непрерывный аналог процедуры стохастической аппроксимации Роббинса — Монро в том случае, когда значения неизвестной функции $R(x)$ измеряются с ошибкой типа гауссовского белого шума.

По аналогии с дискретным временем естественно потребовать, чтобы выполнялись условия

$$\int_0^\infty a(t)\,dt = \infty, \qquad \int_0^\infty a^2(t)\,dt < \infty. \tag{3.3}$$

Эти условия имеют тот же смысл, что и условия (1.4). Легко, например, проверить, что даже при отсутствии помех ($\sigma(t, x) \equiv 0$) для сходимости решений уравнения (3.2) к x_0 необходимо, чтобы функция $a(t)$ была не интегрируема на $[0, \infty]$. Второе же условие (3.3) нужно для погашения асимптотического влияния случайных помех.

Уравнение (3.2) определяет марковский случайный процесс $X^x(t) = X^{0,x}(t)$ с производящим дифференциальным оператором [2])

$$L = \frac{\partial}{\partial t} + a(t)\,R(x)\,\frac{\partial}{\partial x} + \frac{a^2(t)}{2}\,\sigma^2(t, x)\,\frac{\partial^2}{\partial x^2}. \tag{3.4}$$

Как и в случае дискретного времени, справедлива следующая теорема.

Теорема 3.1. *Пусть выполнены следующие условия:*

$$R(x)\,(x - x_0) < 0 \ \textit{при}\ x \neq x_0, \tag{3.5}$$

$$\sigma^2(x) \leqslant K(1 + x^2), \tag{3.6}$$

$$\int_0^\infty a(t)\,dt = \infty, \qquad \int_0^\infty a^2(t)\,dt < \infty.$$

---

[1]) Всюду в этой главе при рассмотрении стохастических дифференциальных уравнений предполагается, что их коэффициенты удовлетворяют условиям (B) § 3.7.

[2]) Как и выше, для простоты изложения мы рассматриваем процесс $X^x(t)$, определяемый начальным условием $X(0) = x$.

Тогда любое решение $X^x(t)$ *уравнения* (3.2) *почти наверное стремится при* $t \to \infty$ *к* x_0, *т. е.*

$$\mathsf{P}\{\lim_{t\to\infty} X^x(t) = x_0\} = 1, \qquad x \in E_1.$$

Эта теорема является следствием теоремы 3.8.2 при $F(t, x) = F(x) = R(x)$, $\alpha(t) = \beta(t) = a(t)$, $\gamma(t) = 0$.

Предположим теперь, что мы хотим найти решение уравнения $R(x) = 0$, где $R(x)$ — вектор из E_l, причем значения $R(x)$ могут быть измерены с ошибкой типа гауссовского белого шума, так что результат измерения $Y_t(x, \omega)$ в момент времени t в точке $x \in E_l$ имеет вид

$$Y_t(x, \omega) = R(x) + \sum_{r=1}^{k} \sigma_r(t, x)\dot{\xi}_r(t).$$

Здесь $\sigma_r(t, x)$ — неизвестные векторы из E_l, а $\dot{\xi}_r(t) = \dot{\xi}_r(t, \omega)$, $r = 1, \ldots, k$,— независимые в совокупности гауссовские белые шумы. Тогда многомерным непрерывным аналогом процедуры Роббинса — Монро (1.9) будет, очевидно, процедура, описываемая стохастическим дифференциальным уравнением

$$dX(t) = a(t)\Big(R(X(t))\,dt + \sum_{r=1}^{k} \sigma_r(t, X(t))\,d\xi_r(t)\Big).$$

Условия сходимости этой процедуры даны ниже, в §§ 4 и 5.1.

Аналогично можно также рассмотреть и задачу о нахождении точки $x = x_0$ максимума неизвестной функции $f(x)$, $x \in E_1$, если ее значения наблюдаются с ошибкой типа гауссовского «белого шума». В этом случае непрерывным аналогом процедуры стохастической аппроксимации Кифера — Вольфовица (2.5) будет, очевидно, процедура, описываемая стохастическим дифференциальным уравнением Ито

$$dX(t) = \frac{a(t)}{c(t)}\left(\frac{f(X(t)+c(t)) - f(X(t)-c(t))}{2}\,dt + \sigma(t, X(t))\,d\xi(t)\right), \tag{3.7}$$

где $a(t)$, $c(t)$ — положительные непрерывные функции времени, удовлетворяющие соотношениям

$$\int_0^\infty a(t)\,dt = \infty, \qquad \int_0^\infty \frac{a^2(t)}{c^2(t)}\,dt < \infty.$$

Задача 3.1. Пусть $f'(x)$ непрерывна и удовлетворяет условию Липшица, причем

1) $f'(x)(x - x_0) < 0$ при $x \neq x_0$,

2) $\sigma^2(t, x) \leqslant K(1 + x^2)$,

3) $\int_0^\infty a(t)\,dt = \infty$, $\int_0^\infty \frac{a^2(t)}{c^2(t)}\,dt < \infty$,

$$\int_0^\infty a(t)\,c(t)\,dt < \infty.$$

Доказать, что тогда любое решение $X^x(t)$ уравнения (3.7) сходится п. н. к точке x_0 при $t \to \infty$.

Указание. Воспользоваться теоремой 3.8.2.

В том случае, когда $f(x)$ — функция многих переменных, так что x — вектор из E_l, соответствующая непрерывная процедура стохастической аппроксимации будет описываться стохастическим дифференциальным уравнением Ито

$$dX(t) = \frac{a(t)}{c(t)}\left[\frac{f_+(c(t), X(t)) - f_-(c(t), X(t))}{2}\,dt + \sum_{r=1}^{k} \sigma_r(t, X(t))\,d\xi_r(t)\right] = a(t)\,\nabla_c f(X(t))\,dt + \frac{a(t)}{c(t)}\sum_{r=1}^{k} \sigma_r(t, X(t))\,d\xi_r(t), \qquad (3.8)$$

где векторы $f_\pm(c(t), x)$, $\nabla_c f(x)$ определены так же, как и в § 2.

Условия сходимости многомерной процедуры (3.8) будут получены ниже, в §§ 5 и 5.1.

§ 4. Сходимость процедуры Роббинса — Монро

Рассмотрим сначала введенную в § 3 непрерывную процедуру, позволяющую находить решение $x = x_0$ уравнения $R(x) = 0$, если значения вектора $R(x) \in E_l$ наблюдаются с ошибкой типа гауссовского белого шума. Эта процедура описывается уравнением

$$dX = a(t)\left(R(X)\,dt + \sum_{r=1}^{k} \sigma_r(t, X)\,d\xi_r(t)\right), \qquad (4.1)$$

где $\xi_r(t)$, $r = 1, \ldots, k$, — независимые в совокупности стандартные винеровские процессы, $\sigma_r(t, x)$ — некоторые неизвестные векторы из E_l, функция $a(t)$ положительна.

Для того чтобы пояснить характер возникающих ниже условий, обсудим сначала вопрос о сходимости к x_0 любого решения детерминированной системы

$$dX = a(t)\,R(X)\,dt. \qquad (4.2)$$

В одномерном случае при условии $\int\limits_0^\infty a(t)\,dt = \infty$ такая сходимость гарантируется соотношением

$$R(x)(x - x_0) < 0 \text{ при } x \neq x_0, \qquad (4.3)$$

так как оно обеспечивает нужный знак производной $X(t)$ решения уравнения (4.2). В многомерном случае невозможно дать условия сходимости (устойчивости) в столь простой форме. В связи с этим условия сходимости формулируют обычно в терминах существования функции $V(x)$ (функции Ляпунова) такой, что

$$V(x) > 0, \quad \left(R(x), \frac{\partial}{\partial x} V\right) < 0$$
$$\text{при } x \neq x_0; \; V(x_0) = 0, \; V(x) \to \infty \text{ при } |x| \to \infty. \qquad (4.4)$$

Геометрический смысл условий (4.4) очевиден (см., например, Малкин [1]): при их выполнении любое решение $X(t)$ уравнения (4.2), начинающееся в некоторый момент времени t_0 на поверхности $V(x) = c$, попадает при $t > t_0$ в множество $V(x) < c$, каково бы ни было $c > 0$. Это вытекает из неравенства

$$\frac{d}{dt} V(X(t)) = a(t)\left(R(X(t)), \frac{\partial}{\partial x} V(X(t))\right) < 0.$$

Наличие случайных возмущений приводит, конечно, к некоторым дополнительным требованиям на функцию $V(x)$. Справедлива, в частности, следующая

Теорема 4.1. *Пусть существует функция $V(x) \in C_2$, удовлетворяющая условиям (4.4) и неравенству*

$$\sum_{r=1}^{k} \left(\sigma_r(t, x), \frac{\partial}{\partial x}\right)^2 V(x) \leqslant k_1 (1 + V(x)), \quad k_1 > 0. \quad (4.5)$$

Тогда для любого $x \in E_l$ решение $X^x(t)$, $X^x(0) = x$, уравнения (4.1) сходится почти наверное к x_0 при $t \to \infty$, если только

$$\int_0^\infty a(t)\, dt = \infty, \qquad \int_0^\infty a^2(t)\, dt < \infty. \quad (4.6)$$

Если, кроме того, $V(x) \geqslant k_2 | x - x_0 |^\gamma$, $k_2 > 0$, $\gamma > 0$, то $\mathsf{M} \, | X^x(t) - x_0 |^{\gamma_1} \to 0$ при $t \to \infty$ для каждого положительного $\gamma_1 < \gamma$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Очевидно,

$$LV(x) \leqslant -a(t) \left| \left(R(x), \frac{\partial}{\partial x} V(x) \right) \right| + \frac{k_1 a^2(t)}{2} (1 + V(x)).$$

Поэтому сформулированное утверждение является следствием теоремы 3.8.1 при $V(t, x) = V(x)$, $\alpha(t) = a(t)$, $g(t) = \frac{k_1}{2} a^2(t)$, если в качестве B взять множество, состоящее из одной точки $x = x_0$.

Рассмотрим в качестве примера функцию $V(x) = (C(x - x_0), (x - x_0))$, где C — положительно определенная матрица. Эта функция удовлетворяет условиям (4.4.), и поэтому согласно теореме 4.1 $X^x(t) \to x_0$ п. н. при $t \to \infty$, если выполнены соотношения (4.6), $(R(x), C(x - x_0)) < 0$ при $x \neq x_0$ и, кроме того

$$\sum_{r=1}^{k} | \sigma_r(t, x) |^2 < k(1 + | x |^2). \quad (4.7)$$

Для одномерного процесса стохастической аппроксимации имеет место следующий, в определенном смысле окончательный результат.

Теорема 4.2. *Пусть выполнены соотношения* (4.3), (4.6), *причем* $\sup\limits_{t \geqslant 0,\ |x - x_0| < \theta} \sigma^2(t, x) = Q < \infty$ *дл некоторого*

$\theta > 0$. *Тогда для любого* $x \in E_1$, *решение* $X^x(t)$ *уравнения* (3.2) *сходится почти наверное к* x_0 *при* $t \to \infty$.

Доказательство. Не ограничивая общности, можно считать $x_0 = 0$. Рассмотрим функцию $W(x) \in C_2$, удовлетворяющую условиям:

а) $W(x) > 0$ при $x \neq 0$, $W(0) = 0$,

б) $W'(x)x > 0$ при $x \neq 0$,

в) функция $W(x)$ линейна по x при $|x| \geqslant \theta$.

Нетрудно проверить, что

$$LW(x) \leqslant -a(t)\,|R(x)W'(x)| + Q_1\frac{a^2(t)}{2},$$

$$Q_1 = Q\max_{x \in E_1}|W''(x)|,$$

где L — оператор, определенный формулой (3.4). Поэтому доказываемое утверждение вытекает из теоремы 3.8.1, если положить $\alpha(t) = a(t)$, $g(t) = (Q_1 a^2(t))/2$, $\varphi(t, x) = |R(x)W'(x)|$.

Подчеркнем, что в условиях теоремы 4.2 не накладывается никаких ограничений на возможный рост по x функций $|R(x)|$ и $|\sigma(t, x)|$. Ниже мы увидим на примере, что такого рода результат неверен для дискретных процедур.

Остановимся теперь на условиях, при которых процесс стохастической аппроксимации (4.1) сходится с ростом времени к точке x_0 по вероятности.

Задача 4.1. Пусть $\alpha(t) > 0$, $\beta(t) > 0$ $(t \geqslant t_0)$ — ограниченные функции, и выполнены соотношения

$$\int_{t_0}^{\infty} \alpha(t)\,dt = \infty,$$

$$\varkappa(t) = \int_{t_0}^{t} \beta(u)\exp\left\{-\int_{u}^{t} \alpha(v)\,dv\right\}du \to 0$$

при $t \to \infty$.

Пусть, далее, существует функция $V(t, x) \in C_2$, удовлетворяющая условиям [1])

$$\underset{\sim}{V}(x) > 0 \text{ при } x \neq 0, \quad \lim_{x \to \infty} \underset{\sim}{V}(x) = \infty$$

---

[1]) Напомним, что $\underset{\sim}{V}(x) = \inf\limits_{t \geqslant t_0} V(t, x)$.

и неравенству

$$LV(t, x) \leqslant -\alpha(t) V(t, x) + \beta(t), \quad t \geqslant t_0. \tag{4.8}$$

1) Доказать, что любое решение $X^{s,x}(t)$, $s \geqslant t_0$, $x \in E_l$, уравнения (4.1) сходится по вероятности к нулю при $t \to \infty$.

2) Если, кроме того, выполнено условие $V(t, x) \geqslant k\,|x - x_0|^\gamma$, $k > 0$, $\gamma > 0$, то и $\mathsf{M}\,|X^{s,x}(t)|^\gamma \to 0$ при $t \to \infty$.

3) Показать, что $\varkappa(t) \to 0$ при $t \to \infty$, если $\beta(t)/\alpha(t) \to 0$ при $t \to \infty$ и $\int\limits_{t_0}^{\infty} \alpha(t)\,dt = \infty$.

Указание. Для функции $W(t, x) = V(t, x) \exp\left\{\int\limits_{t_0}^{t} \alpha(v)\,dv\right\}$, пользуясь леммой 3.5.1, леммой Фату и регулярностью процесса, установить неравенство

$$\mathsf{M}W(t, X^{s,x}(t)) - W(s, x) \leqslant \int\limits_{s}^{t} \beta(u) \exp\left\{\int\limits_{t_0}^{t} \alpha(v)\,dv\right\} du.$$

Нам понадобится также следующее важное в теории устойчивости движения определение.

Решение $x = x_0$ детерминированной системы $\dot{X} = R(X)$ называется *равномерно экспоненциально устойчивым в целом* при $t \geqslant t_0$, если для любого ее решения $X_0^{s,x}(t)$ с начальным условием $X_0^{s,x}(s) = x$, $s \geqslant t_0$, $x \in E_l$, справедливо неравенство

$$|X_0^{s,x}(t) - x_0| < A\,|x - x_0| \exp\{-\alpha(t - s)\}, \tag{4.9}$$

где положительные постоянные A, α не зависят от t, s, x. Как известно (см. Красовский [1], § 10), в случае, когда функция $R(x)$ имеет ограниченные производные до второго порядка включительно и выполнено (4.9), существует функция $V(x)$, для которой

$$\left(R(x), \frac{\partial}{\partial x} V(x)\right) < -k_1 V(x), \tag{4.10}$$

$$V(x) \geqslant k_2 |x - x_0|^2, \quad \left|\frac{\partial^2}{\partial x_i\,\partial x_j} V(x)\right| < k_3, \tag{4.11}$$

$$|\nabla V(x)| \leqslant k_4 |x - x_0|$$

(k_i — положительные постоянные).

Теорема 4.3. *Пусть детерминированная система* $\dot{X}=R(X)$ *равномерно экспоненциально устойчива в целом при* $t\geqslant 0$, *причем функция* $R(x)$ *имеет ограниченные частные производные первого и второго порядка и выполнено неравенство* (4.7). *Тогда процесс* $X^x(t)$, $x\in E_l$, *определяемый уравнением* (4.1), *сходится к* x_0 *по вероятности и в среднем квадратичном при* $t\to\infty$, *если только*

$$\lim_{t\to\infty} a(t)=0, \qquad \int\limits_0^\infty a(t)\,dt=\infty.$$

Не ограничивая общности, можно считать $x_0=0$. Поэтому теорема 4.3 немедленно вытекает из результата задачи 4.1, если заметить, что, в силу условий (4.10), (4.11), (4.7) для некоторой постоянной $T>0$

$$LV\leqslant -a(t)\,|(R(x),\nabla V)|+\frac{a^2(t)}{2}\sum_{r=1}^{k}(\sigma_r(t,x),\nabla)^2V\leqslant$$

$$\leqslant -k_1a(t)V+k_5a^2(t)(1+V)\leqslant -k_6a(t)V+k_5a^2(t),$$

$$\text{при } t\geqslant T,$$

где L — производящий дифференциальный оператор процесса $X^x(t)$.

Изучим теперь условия сходимости дискретной процедуры Роббинса — Монро, описываемой соотношением (см. § 1)

$$X(t+1)-X(t)=$$

$$=a(t)\,(R(X(t))+G(t+1,X(t),\omega))=$$

$$=\Phi(t+1,X(t),\omega), \qquad t=1,2,\ \ldots \tag{4.12}$$

где X, R, G — векторы из E_l, причем функция $\Phi(t,x,\omega)=(\Phi_1(t,x,\omega),\ \ldots,\ \Phi_l(t,x,\omega))^*$ удовлетворяет условиям (А) § 2.3, $\mathsf{M}G(t,x,\omega)\equiv 0$, $a(t)$ — положительная последовательность.

Обозначим через C_2^0 совокупность функций $V(x)$ из C_2, имеющих ограниченные частные производные второго порядка.

Для системы (4.12) справедливы следующие утверждения, аналогичные теоремам 4.1, 4.3.

Теорема 4.4. *Пусть существует функция $V(x) \in \mathbf{C}_2^0$, удовлетворяющая условиям*

$$V(x) > 0,\ V(x_0) = 0,\ \sup_{\varepsilon < |x - x_0| < 1/\varepsilon} \left(R(x), \frac{\partial}{\partial x} V(x)\right) < 0$$

для любого $\varepsilon > 0$, $V(x) \to \infty$ при $|x| \to \infty$ и, кроме того,

$$|R(x)|^2 + \mathsf{M}\,|G(t, x, \omega)|^2 \leqslant k_1(1 + V(x)) - \\ - k_2 \left(R(x), \frac{\partial}{\partial x} V(x)\right),\ k_1 = \mathrm{const},\ k_2 = \mathrm{const}. \qquad (4.13)$$

Тогда для любого $x \in E_l$ процесс $X^x(t)$, определяемый соотношением (4.12), сходится п. н. к x_0 при $t \to \infty$, если только

$$\sum_{t=0}^{\infty} a(t) = \infty, \qquad \sum_{t=0}^{\infty} a^2(t) < \infty.$$

Доказательство. Разлагая функцию $V(x)$ по формуле Тейлора и учитывая (4.13), получим для некоторых постоянных $k_i > 0$, $i = 3, 4, 5$,

$$LV(x) = \mathsf{M}V(x + a(t)(R(x) + G(t+1, x, \omega))) - V(x) \leqslant \\ \leqslant a(t)\left(R(x), \frac{\partial}{\partial x} V(x)\right) + \\ + k_3 a^2(t)\left[k_1(1 + V(x)) - k_2\left(R(x), \frac{\partial}{\partial x} V(x)\right)\right] = \\ = -(k_4 a^2(t) - a(t))\left(R(x), \frac{\partial}{\partial x} V(x)\right) + \\ + k_5 a^2(t)(1 + V(x)).$$

Теперь для доказательства теоремы достаточно воспользоваться результатом теоремы 2.7.1 и замечанием к ней.

Рассматривая функцию $V(x) = (C(x - x_0), (x - x_0))$, где C — симметричная положительно определенная матрица, получим из этой теоремы

Следствие 4.1. Пусть выполнены условия:

$$\sup_{\varepsilon < |x - x_0| < 1/\varepsilon} (R(x), C(x - x_0)) < 0$$

для любого $\varepsilon > 0$,

$$\sum_{t=0}^{\infty} a(t) = \infty, \qquad \sum_{t=0}^{\infty} a^2(t) < \infty,$$

$$|R(x)|^2 + \mathsf{M}\,|G(t, x, \omega)|^2 \leqslant k(1 + |x|^2),\ k = \mathrm{const}.$$

Тогда для любого $x \in E_l$ процесс $X^x(t)$, определяемый соотношением (4.12), сходится п. н. к x_0 при $t \to \infty$.

Заметим, что уже в одномерном случае последнее условие может не выполняться, если функции $R^2(x)$ и $\mathsf{M}G^2(t, x, \omega)$ растут быстрее $|x|^2$ при $|x| \to \infty$. Можно было бы по аналогии со случаем непрерывного времени (см. теорему 4.2) ожидать сходимость одномерной процедуры (4.12) при любом росте этих функций. Однако простые соображения показывают, что это не так даже в отсутствие случайных помех, когда $G(t, x, \omega) \equiv 0$. Например, решение $X(t)$ задачи

$$X(t+1) - X(t) = -\frac{X(t)}{t+1}(1 + X^2(t)), \qquad X(0) = 10$$

будет с ростом t «раскачиваться», совершая скачки все большей и большей длины: $X(1) = -10^3$, $X(2) = (10^9 - 10^3)/2$ и т. д. Для непрерывного же времени такие эффекты невозможны.

Следующая лемма (ср. с задачей 4.1) близка к теореме V гл. IV АБР [1].

Лемма 4.1. *Пусть существует функция $V(t, x)$ и последовательности $\alpha(t)$, $\beta(t)$ такие, что*

$$\inf_{|x|>\varepsilon} \tilde{V}(x) > 0 \text{ для любого } \varepsilon > 0, \tag{4.14}$$

$$LV(t, x) \leqslant -\alpha(t) V(t, x) + \beta(t), \tag{4.15}$$

$$\lim_{t\to\infty} \prod_{u=1}^{t} (1 - \alpha(u)) = 0, \tag{4.16}$$

$$\lim_{t\to\infty} I(t) = 0, \tag{4.17}$$

где

$$I(t) = \sum_{k=1}^{t-2} \beta(k) \prod_{u=k+1}^{t-1} (1 - \alpha(u)) + \beta(t-1).$$

Тогда любая траектория $X^x(t)$, $x \in E_l$, марковского случайного процесса, определяемого с помощью (4.12) стремится к нулю по вероятности при $t \to \infty$. Если к тому же $V(t, x) \geqslant k|x|^\gamma$, $k > 0$, $\gamma > 0$, то и $\mathsf{M}|X^x(t)|^\gamma \to 0$ при $t \to \infty$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из (4.15) вытекает конечность $\mathsf{M}V(t, X^x(t))$ при любом t. Поэтому согласно формуле (2.3.5), еще раз учитывая (4.15), имеем

$$\mathsf{M}V(t+1,\ X^x(t+1)) \leqslant$$
$$\leqslant (1-\alpha(t))\,\mathsf{M}V(t,\ X^x(t)) + \beta(t).$$

Отсюда следует, что

$$\mathsf{M}V(t,\,X^x(t)) \leqslant \prod_{u=1}^{t-1}(1-\alpha(u))\,V(1,\,x) + I(t),\ \ t > 2. \qquad (4.18)$$

Из (4.16), (4.17) и (4.18) вытекает соотношение

$$\lim_{t\to\infty}\mathsf{M}V(t,\,X^x(t)) = 0,$$

а значит (поскольку $\underset{\sim}{V}(x) > 0$ при $x \neq 0$), и утверждение леммы.

З а д а ч а 4.2. Показать, что:

а) условие (4.16) можно заменить условиями:

$$\alpha(t) \leqslant 1 \quad \text{при} \quad t \geqslant t_0, \qquad \sum_{t=1}^{\infty}\alpha(t) = \infty,$$

б) условие (4.17) выполнено, если справедливо соотношение (4.16) и

$$\lim_{t\to\infty}\beta(t) = 0, \quad \lim_{t\to\infty}\frac{\beta(t)}{\alpha(t)} = 0.$$

Теорема 4.5. *Пусть существует функция* $V(x)$, *удовлетворяющая условиям* (4.10), (4.11), (4.13), (4.14), *и выполнены соотношения*

$$\sum_{t=1}^{\infty} a(t) = \infty, \quad a(t) \to 0 \quad \text{при} \quad t \to \infty.$$

Тогда процесс $X^x(t)$, *определяемый соотношением* (4.12), *сходится по вероятности к* x_0 *при* $t \to \infty$ *для любого* $x \in E_l$.

Д о к а з а т е л ь с т в о этой теоремы вытекает из леммы 4.1 (см. также задачу 4.2), и мы предоставляем его читателю.

§ 5. Сходимость процедуры Кифера — Вольфовица

Изучим теперь условия сходимости введенных в §§ 2, 3 процедур стохастической аппроксимации, предназначенных для нахождения точки максимума x_0 неизвестной функции $f(x)$.

Рассмотрим сначала непрерывную процедуру, описываемую в обозначениях §§ 2, 3 уравнением

$$dX = a(t)\nabla_c f(X) + \frac{a(t)}{c(t)}\sum_{r=1}^{k}\sigma_r(t, X)\,d\xi_r(t). \qquad (5.1)$$

Производящий дифференциальный оператор марковского случайного процесса $X^x(t)$, $X^x(0)=x$, определенного уравнением (5.1), имеет вид

$$L = \frac{\partial}{\partial t} + a(t)\left(\nabla_c f(x), \frac{\partial}{\partial x}\right) + \\ + \frac{a^2(t)}{2c^2(t)}\sum_{r=1}^{k}\left(\sigma_r(t, x), \frac{\partial}{\partial x}\right)^2. \qquad (5.2)$$

Из результатов § 3.8 можно получить условия сходимости процедуры (5.1) при различных предположениях относительно коэффициентов $\nabla_c f(x)$, $\sigma_r(t, x)$ уравнения (5.1). Мы рассмотрим несколько вариантов таких условий в следующих примерах.

Первый пример показывает, что теорема 3.8.1 применима даже в тех случаях, когда $c(t)$ не стремится к нулю с ростом t.

П р и м е р 5.1. Пусть $f(x) = -(F(x - x_0), (x - x_0))$, причем матрица F положительно определена, т. е. $f(x) < 0$ при $x \neq x_0$. Тогда, как легко проверить, $\nabla_c f(x) = \frac{\partial}{\partial x} f(x)$. Поэтому, полагая $V(t, x) = -f(x)$, находим

$$LV = -a(t)\left|\frac{\partial}{\partial x} f(x)\right|^2 + \frac{a^2(t)}{c^2(t)}\sum_{r=1}^{k}(F\sigma_r(t, x), \sigma_r(t, x)).$$

Применяя теорему 3.8.1, получим отсюда, что при выполнении условия (4.7) процесс $X^x(t)$ сходится к x_0 п. н., если функции $a(t)$ и $c(t)$ удовлетворяют условиям

$$\int_0^\infty a(t)\,dt = \infty, \qquad \int_0^\infty \frac{a^2(t)}{c^2(t)} < \infty. \qquad (5.3)$$

В частности, можно положить $a(t) = a_0 = \text{const}$, $c(t) = a_0 t$. Тогда будет выполняться неравенство

$$LV \leqslant (-k_1 a_0 + k_2)V, \quad k_1 > 0,\ k_2 > 0$$

и, значит, согласно формуле (3.7.4), при достаточно большом a_0 величина $\mathsf{M}\,|X^x(t)-x_0|^2$ может быть сделана сколь угодно малой при всех $t>0$. Этот факт соответствует известной стратегии для нахождения точки максимума параболы: необходимо сначала «бить по краям», т. е. выбирать большие значения $c(t)$ (см. второй пример § 10.3).

В этом примере сколь угодно быстрая сходимость $X^x(t)$ к x_0 была достигнута за счет знания функциональной зависимости $f(x)$ с точностью до параметров F, x_0. Легко понять, что для несколько другой функции $f(x)$ процедура примера 1 не приведет к точке x_0. Интересно в связи с этим построить процедуры (т. е. выбрать функции $a(t)$ и $c(t)$) так, чтобы процесс $X^x(t)$ сходился к x_0 для возможно более широкого класса функций $f(x)$, имеющих единственный максимум. При этом естественно ограничиться такими функциями $f(x)$, для которых точка x_0 является равномерно асимптотически устойчивой в целом для чисто градиентной процедуры

$$\dot{X}=a\,\frac{\partial}{\partial x}f(X) \tag{5.4}$$

при постоянном a. Из результатов Красовского ([1], теорема 5.3) вытекает в этом случае существование функции $V(x)$ со свойствами

$$V(x)>0,\quad \left(\frac{\partial}{\partial x}f(x),\ \frac{\partial}{\partial x}V(x)\right)<0$$
$$\text{при } x\neq x_0;\quad V(x_0)=0,\ \lim_{|x|\to\infty}V(x)=\infty. \tag{5.5}$$

Мы обсудим теперь вопрос о том, какие требования следует добавить к (5.5) для обеспечения сходимости процедуры (5.1). Эти требования естественно разделяются на две группы: условия на коэффициенты $a(t)$, $c(t)$ и дальнейшие условия на $f(x)$ (или, что равносильно, на функцию Ляпунова $V(x)$). Естественно, что наложив более жесткие ограничения на $a(t)$ и $c(t)$, можно доказать сходимость процедуры (5.1) для более широкого класса функций $f(x)$. Такого рода процедуры достаточно универсальны, но, конечно, сходимость в них, вообще говоря, довольно медленна. Представляет интерес поэтому, накладывая некоторые более жесткие ограничения на $f(x)$ (практически это означает наличие некоторой предварительной информации о структуре неизвестной функции регрессии $f(x)$), ускорять сходимость процедуры за счет более широких возможностей выбора $a(t)$ и $c(t)$. В связи с этим мы рассмотрим ниже разные варианты условий, обеспечивающих сходимость процедуры (5.1).

Пример 5.2. Пусть функция $f(x)$ имеет непрерывные частные производные, удовлетворяющие глобальному условию Липшица в E_l. Тогда разлагая функции $f(x \pm c(t) e_i)$ по формуле Тейлора, получим при некоторой постоянной $k > 0$ неравенство

$$\left| \nabla_c f(x) - \frac{\partial}{\partial x} f(x) \right| < kc(t).$$

Отсюда вытекает, что условия теоремы 3.8.1 выполнены, если, кроме (5.5), для функции $V(x) \in C_2$ имеет место неравенство

$$\left| \frac{\partial}{\partial x} V(x) \right| + \left| \sum_{r=1}^{k} \left(\sigma_r(t, x), \frac{\partial}{\partial x}\right)^2 V(x) \right| < k_1(1 + V(x)) \quad (5.6)$$

(здесь и ниже k_i — положительные постоянные), а функции $a(t)$ и $c(t)$ удовлетворяют условиям (5.3) и условию

$$\int_0^\infty a(t) c(t)\, dt < \infty. \quad (5.7)$$

Пример 5.3. Пусть функция $f(x)$ имеет вторые непрерывные частные производные, удовлетворяющие (глобальному) условию Липшица. Тогда, по аналогии с примером 5.2, опираясь на неравенство

$$\left| \nabla_c f(x) - \frac{\partial}{\partial x} f(x) \right| < k_2 c^2(t), \quad (5.8)$$

получим, что для сходимости $X^x(t)$ к x_0 п. н. достаточно выполнения условий (5.3), (5.5), (5.6) и соотношения

$$\int_0^\infty a(t) c^2(t)\, dt < \infty.$$

Пример 5.4. Пусть вторые частные производные функции $f(x)$ лишь непрерывны. Тогда, полагая

$$\psi(t, x) = \max_{1 \leq i \leq l} \max_{|\theta| \leq 1} \left| \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} (x + \theta c(t) e_i) \right|,$$

получим неравенство

$$\left| \nabla_c f(x) - \frac{\partial}{\partial x} f(x) \right| < k_3 c(t) \psi(t, x)$$

и, следовательно,

$$\left| \left(\nabla_c f(x), \frac{\partial}{\partial x} V(x) \right) - \left(\frac{\partial}{\partial x} f(x), \frac{\partial}{\partial x} V(x) \right) \right| < \\ < k_3 c(t) \psi(t, x) \left| \frac{\partial}{\partial x} V(x) \right|.$$

Отсюда и из теоремы 3.8.1, применяя аналогичные вышеизложенным соображения, получим, что выполнение условий (5.3), (5.5), (5.7) и условия

$$\psi(t, x) \left| \frac{\partial}{\partial x} V(x) \right| + \left| \sum_{r=1}^{k} \left(\sigma_r(t, x), \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 V(x) \right| < k_4 (1 + V(x))$$

также достаточно для сходимости непрерывной процедуры Кифера — Вольфовица (5.1).

З а д а ч а 5.1. Пусть выполнены условия (5.3), (5.7),

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} f(x), x - x_0 \right) < 0 \quad \text{при } x \neq x_0$$

и

$$\max_{1 \leqslant i \leqslant l} \max_{|\theta| \leqslant 1} \left| \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} (x + \theta c(t) e_i) \right| + \sum_{r=1}^{k} |\sigma_r(t, x)| \leqslant k_5 (1 + |x|).$$

Показать, что процесс $X^x(t)$ сходится к x_0 с вероятностью 1.

П р и м е р 5.5. Пусть система (5.4) при постоянном a равномерно экспоненциально устойчива в целом в смысле (4.9), а функция $f(x)$ имеет ограниченные производные второго и третьего порядков. Тогда, в силу уже цитированного в § 4 результата Красовского [1], существует функция $V(x)$, удовлетворяющая условиям (4.11) и неравенству

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} f(x), \frac{\partial}{\partial x} V(x) \right) \leqslant -k_6 V(x).$$

Поэтому, учитывая (5.8), находим

$$LV(x) = a(t)\Big[\Big(\frac{\partial}{\partial x} f(x), \frac{\partial}{\partial x} V(x)\Big) + \\ + \Big(\nabla_c f(x) - \frac{\partial}{\partial x} f(x), \frac{\partial}{\partial x} V(x)\Big)\Big] + \\ + \frac{a^2(t)}{2c^2(t)} \sum_{r=1}^{k} \Big(\sigma_r(t, x) \frac{\partial}{\partial x}\Big)^2 V(x) \leqslant \\ \leqslant -k_6 a(t) V(x) + k_7 a(t) c^2(t) |x - x_0| + \\ + k_8 \frac{a^2(t)}{c^2(t)} \sum_{r=1}^{k} |\sigma_r(t, x)|^2.$$

Отск да, применяя неравенство $|x - x_0| < k_9 V + k_{10}$ и результат задачи 4.1, получим следующее утверждение: если система (5.4) равномерно экспоненциально устойчива в целом при некотором постоянном a, выполнено неравенство (4.7) и условия

$$c(t) \to 0, \quad a(t)/c^2(t) \to 0 \quad \text{при} \quad t \to \infty, \quad \int_0^\infty a(t)\,dt = \infty,$$

то процесс $X^x(t)$ сходится по вероятности и в среднем квадратичном к точке x_0.

Рассмотрим теперь одномерную процедуру стохастической аппроксимации, описываемую уравнением

$$dX = \frac{a(t)}{c(t)} \Big\{\frac{1}{2}(f(X + c(t)) - f(X - c(t)))\,dt + \\ + \sigma(t, x)\,d\xi(t)\Big\}, \quad (5.9)$$

где $X \in E_1$. Применение теоремы 3.8.1 позволяет получить довольно окончательный результат при минимальных условиях. Мы сформулируем его в виде следующей теоремы.

Теорема 5.1. *Пусть функция $f(x)$ непрерывно дифференцируема и принимает в точке $x = x_0$ максимальное значение, причем $f'(x) \neq 0$ при $x \neq x_0$. Пусть, далее, $\sup\limits_{t \geqslant 0,\, |x - x_0| < \theta} \sigma^2(t, x) = Q < \infty$ для некоторого $\theta > 0$. Тогда любое решение $X^x(t)$ уравнения (5.9) стремится* *при* $t \to \infty$ *к* x_0 *с вероятностью* 1, *если только выполнены соотношения* (5.3) *и* $c(t) \to 0$ *при* $t \to \infty$.

Доказательство. Не ограничивая общности, можно считать $x_0 = 0$. Пусть $W(x)$ — дважды непрерывно дифференцируемая функция, удовлетворяющая условиям:

1) $W(x) > 0$ при $x \neq 0$, $W(0) = 0$,

2) $W'(x)\, x > 0$ при $x \neq 0$,

3) $\int\limits_0^\infty \frac{a(t)}{c(t)} \widetilde{W}(c(t))\, dt < \infty$, где $\widetilde{W}(y) = \max\limits_{|x| \leqslant y} |W'(x)|$,

4) функция $W(x)$ линейна по x при $|x| \geqslant \theta$. Такая функция, очевидно, существует, причем справедливы соотношения

$$LW = a(t)\, \nabla_c f(x)\, W'(x) + \frac{a^2(t)}{2c^2(t)} \sigma^2(t, x)\, W''(x) \leqslant$$

$$\leqslant Q_1 \frac{a(t)}{c(t)} \widetilde{W}(c(t)) - a(t)\, \varphi(t, x) + \frac{Qa^2(t)}{2c^2(t)} \max_{|x| \leqslant \theta} W''(x),$$

где

$$Q_1 = \max_{\substack{t \geqslant 0 \\ |x| \leqslant c(t)}} |f(x + c(t)) - f(x - c(t))|,$$

$$\varphi(t, x) = \begin{cases} 0, & \text{если } |x| < c(t), \\ -\nabla_c f(x)\, W'(x), & \text{если } |x| \geqslant c(t). \end{cases}$$

Пусть ε и R, $\varepsilon < R$,— произвольные положительные числа и $c(t) < \varepsilon$ при $t > T$. Поскольку функции $-f'(x)\, x$ и $W'(x)\, x$ положительны при $x \neq 0$, то, очевидно,

$$\inf_{\varepsilon < |x| < R} [-\nabla_c f(x)\, W'(x)] > 0.$$

Отсюда вытекает, что $\varphi(t, x) \in \Phi(B)$, где $B = \{0\}$. Наше утверждение теперь следует из теоремы 3.8.1.

Подчеркнем, что сходимость $X^x(t)$ к x_0 в теореме 5.1 доказана нами лишь в предположении единственности стационарной точки — точки максимума функции $f(x)$ и существования у нее непрерывной производной. Никаких ограничений на рост функции $|f'(x)|$ при $|x| \to \infty$ при этом не требуется. Как уже отмечалось выше, аналогичный результат для дискретной процедуры стохастической аппроксимации не верен. Кроме того, и на функции

$a(t)$, $c(t)$ пришлось наложить лишь условия (5.3) и потребовать, чтобы $c(t) \to 0$ при $t \to \infty$. Обычно же требуют также достаточно быструю сходимость $c(t)$ к нулю при $t \to \infty$. Нам удалось избежать этого, рассматривая отдельно области $|x| < c(t)$ и $|x| \geqslant c(t)$ при применении теоремы 3.8.1.

Рассмотрим теперь введенную в § 2 процедуру стохастической аппроксимации Кифера — Вольфовица с дискретным временем

$$X(t+1) - X(t) = \\ = a(t)\nabla_c f(X(t)) + \frac{a(t)}{c(t)} G(t+1, X(t), \omega) = \\ = \Phi(t+1, X(t), \omega), \quad (5.10)$$

где $\mathsf{M}G(t, x, \omega) = 0$ для любых $t \geqslant 1$, $x \in E_l$.

Производящий оператор марковского процесса $X^x(t)$, определяемого соотношением (5.10), действует на функцию $V(t, x) \in D_L^{(t, x)}$ по формуле

$$LV(t, x) = \mathsf{M}V\Big(t+1, x + a(t)\nabla_c f(x) + \\ + \frac{a(t)}{c(t)} G(t+1, x, \omega)\Big) - V(t, x). \quad (5.11)$$

Различные условия сходимости этой процедуры легко вывести из результатов § 2.7. Мы предлагаем читателю сделать это, решив следующие задачи.

З а д а ч а 5.2. Доказать, что если существует функция $V(x) \in C_2$, удовлетворяющая условиям (5.5) и имеющая ограниченные частные производные второго порядка, причем

1) $$\left|\frac{\partial}{\partial x} V(x)\right| + \left|\frac{\partial}{\partial x} f(x)\right|^2 + \mathsf{M}|G(t, x, \omega)|^2 \leqslant \\ \leqslant k_1(1 + V(x)), \quad (5.12)$$

2) функция $f(x)$ имеет непрерывные частные производные, удовлетворяющие глобальному условию Липшица,

3) $\sum\limits_{t=0}^{\infty} a(t)c(t) < \infty$,

4) $\sum\limits_{t=0}^{\infty} a(t) = \infty$, $\sum\limits_{t=0}^{\infty} \frac{a^2(t)}{c^2(t)} < \infty$, $c(t) < k_2$,

то $X^x(t) \to x_0$ п. н. при $t \to \infty$ для любого $x \in E_l$. Показать также, что это утверждение остается в силе, если условия 2), 3) заменить соответственно на условия

2)′ функция $f(x)$ имеет непрерывные вторые частные производные, удовлетворяющие глобальному условию Липшица,

3)′ $\sum\limits_{t=0}^{\infty} a(t)\, c^2(t) < \infty$.

Указание. Вычислить $LV(x)$, разлагая функцию $V(x)$ по формуле Тейлора. Провести оценку $LV(x)$ аналогично тому, как это было сделано в примерах 5.2, 5.3 для непрерывного времени. Далее воспользоваться теоремой 2.7.1.

Задача 5.3. Пусть существует функция $V(x) \in C_2$, удовлетворяющая соотношениям (4.11) и неравенству $\left(\frac{\partial}{\partial x} f(x),\ \nabla V(x)\right) < -k_1 V(x)$, $k_1 > 0$. Пусть, кроме того,

1) первые производные $f(x)$ удовлетворяют глобальному условию Липшица,

2) $\left| \frac{\partial}{\partial x} f(x) \right|^2 + \mathsf{M}\, |G(t, x, \omega)|^2 \leqslant k_2 (1 + |x|^2)$,

3) функции $a(t)$, $c(t)$, $a(t)/c^2(t)$ стремятся к нулю с ростом t, причем $\sum\limits_{t=0}^{\infty} a(t) = \infty$.

Доказать, что тогда процесс $X^x(t)$ сходится по вероятности к x_0 при $t \to \infty$, $x \in E_l$.

Указание. Установить неравенство $LV \leqslant [-k_1 a(t) + k_3 \gamma(t)]\, V(x) + k_3 \gamma(t)$, где $\gamma(t) = a^2(t) + a(t)\, c(t) + a^2(t)/c^2(t)$, k_3 — достаточно большая постоянная. Далее применить лемму 4.1 (с учетом утверждения задачи 4.2).

ГЛАВА 5

СХОДИМОСТЬ ПРОЦЕДУР СТОХАСТИЧЕСКОЙ АППРОКСИМАЦИИ. II

Рассматриваются процедуры с. а. РМ и КВ без предположения о единственности корня уравнения регрессии или точки максимума функции регрессии. Устанавливаются теоремы о сходимости в этом случае. Далее доказываются более точные результаты о том, что неустойчивые в достаточно сильном смысле точки соответствующих процедурам детерминированных систем не могут быть с положительной вероятностью предельными для этих процедур.

§ 1. Предварительные замечания

В предыдущей главе при изучении процедур с. а. предполагалось наличие априорной информации о том, что уравнение $R(x) = 0$ имеет единственное решение (для процедуры РМ) или что функция $f(x)$ имеет единственный максимум (для процедуры КВ). Однако нетрудно представить ситуацию, когда наблюдатель не имеет априорной информации подобного рода.

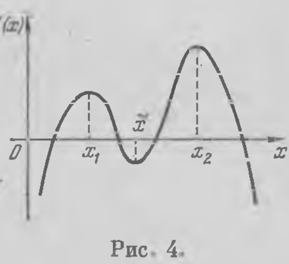

Рис. 4.

Пусть, например, известно, что скалярная функция $f(x)$, наблюдаемая с ошибкой, непрерывно дифференцируема и имеет два максимума (рис. 4) в точках x_1, x_2, подлежащих определению. Пусть, кроме того, $f'(x)\,x < 0$ при всех достаточно больших $|x|$. Рассмотрим в E_1 процедуру КВ

(4.2.5), в которой $a(t) = t^{-1}$, $c(t) = t^{-q}$:

$$X(t+1) - X(t) = \\ = t^{q-1}\left[\frac{f(X(t)+t^{-q}) + f(X(t)-t^{-q})}{2} + G(t+1)\right], \quad X(1) = x.$$

Здесь $G(t)$, $t = 2, 3, \ldots$,— последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с конечной дисперсией.

Для исследования предельного поведения при $t \to \infty$ процесса $X^x(t)$, определяемого этими формулами, можно применить теорему 2.7.1. Однако не существует функции Ляпунова $V(x)$, которая обращается в нуль в точках x_1, x_2, $\tilde{x}$, положительна в остальных точках и удовлетворяет неравенству

$$f'(x)\, V'(x) < 0 \tag{1.1}$$

всюду, кроме этих точек. Поэтому (см. § 2.7) теорема 2.7.1 позволяет получить лишь грубый результат о сходимости $X^x(t)$ к целому отрезку $[x_1, x_2]$. Более эффективным оказывается применение теоремы 2.7.3, так как всегда существует функция $V(x) > 0$, удовлетворяющая соотношению (1.1) при всех x, отличных от x_1, x_2, $\tilde{x}$ (см. рис. 4). В силу этого, из теоремы 2.7.3 легко установить следующий, более сильный результат (см. ниже § 2): с вероятностью 1 процесс $X^x(t)$ сходится к одной из точек x_1, x_2 или $\tilde{x}$. Но и последний результат вряд ли удовлетворит наблюдателя, который при отыскании какого-нибудь локального максимума функции $f(x)$ желает быть уверенным, что не приблизится вместо этого к точке $\tilde{x}$ ее минимума.

Таким образом, возникает следующий вопрос. Можно ли утверждать, что рассматриваемая процедура КВ обладает для любого $x \in E_1$ свойством

$$P\{\{\omega\colon \lim_{t\to\infty} X^x(t) = x_1\} \cup \{\omega\colon \lim_{t\to\infty} X^x(t) = x_2\}\} = 1, \tag{1.2}$$

т. е. что процесс $X^x(t)$ сходится п. н. к одной из точек x_1 или x_2? Ниже мы покажем, что если функция $f'(x)$ удовлетворяет, например, условию Липшица, $\mathsf{M}\,|G(t)|^4 < \infty$ и $1/4 < q < 1/2$, то ответ на этот вопрос положителен.

Аналогичные (1.2) результаты будут также установлены для многомерных процедур КВ и РМ, описываемых либо стохастическими дифференциальными уравнениями ($t \geqslant 0$)

$$dX(t) = a(t)\left[R(X(t)) + \sum_{r=1}^{k} \sigma_r(t, X(t))\, d\xi_r(t)\right], \qquad (1.3)$$

$$dX(t) = a(t)\nabla_c f(X(t)) + \frac{a(t)}{c(t)} \sum_{r=1}^{k} \sigma_r(t, X(t))\, d\xi_r(t), \quad (1.4)$$

либо рекуррентными формулами ($t = 0, 1, 2, \ldots$) [1]

$$X(t+1) - X(t) = \\ = a(t)[R(X(t)) + G(t+1, X(t), \omega)] = \\ = \Phi(t+1, X(t), \omega), \quad (1.5)$$

$$X(t+1) - X(t) = a(t)\nabla_c f(X(t)) + \frac{a(t)}{c(t)} G(t+1, X(t), \omega) = \\ = \Phi(t+1, X(t), \omega). \qquad (1.6)$$

Марковский случайный процесс, определяемый уравнениями (1.3), (1.4) или соотношениями (1.5), (1.6) при начальном условии $X(0) = x$ будем, как обычно, обозначать $X^x(t)$.

§ 2. Общие теоремы

Всюду в этой главе предполагается, что коэффициенты рассматриваемых стохастических дифференциальных уравнений удовлетворяют условиям (B) § 3.7, а функции $\Phi(t, x, \omega)$, определяющие дискретные процедуры с. а.,— условиям (A) § 2.3, причем $\mathsf{M}G(t, x, \omega) = 0$.

Приведем теоремы о сходимости процедур с. а. (1.3) — (1.6) к множествам $B_1 = \{x: R(x) = 0\}$ или $B_2 = \{x: \partial f(x)/\partial x = 0\}$. Эти теоремы не носят окончательного характера, поскольку, как будет показано ниже, при некоторых не слишком жестких предположениях можно гарантировать сходимость рассматриваемых процедур к более узким, чем B_1 или B_2, множествам.

Не стремясь к максимальной общности, будем ниже предполагать, что рассматриваемые функции Ляпунова $V(x)$ припадлежат C_2^0, а множества B_1 и B_2 состоят из конечного числа связных компонент.

---

[1]) Определение $\nabla_c f(x)$ см. в § 4.2.

Теорема 2.1. *Пусть $X^x(t)$ — процесс, определяемый уравнением* (1.3), *и существует неотрицательная функция $V(x) \in C_2^0$, для которой*

$$\lim_{|x|\to\infty} V(x) = \infty, \tag{2.1}$$

$$\left(R(x), \frac{\partial V(x)}{\partial x}\right) < 0 \quad \textit{при} \quad x \overline{\in} B_1, \tag{2.2}$$

$$\sum_{r=1}^{k} |\sigma_r(t, x)|^2 \leqslant K(1 + V(x)). \tag{2.3}$$

Тогда процесс $X^x(t)$, $x \in E_l$, сходится п. н. при $t \to \infty$ либо к одной из точек множества $B_1 = \{x: R(x) = 0\}$, либо к границе одной из его связных компонент, если только

$$a(t) > 0, \qquad \int_0^\infty a(t)\,dt = \infty, \qquad \int_0^\infty a^2(t)\,dt < \infty. \tag{2.4}$$

Доказательство. Из (2.1), (2.2), (2.3) и условия $V(x) \in C_2^0$ имеем:

$$LV(x) = \frac{\partial V}{\partial t} + a(t)\left(R(x), \frac{\partial V}{\partial x}\right) + \frac{a^2(t)}{2}\sum_{r=1}^{k}\left(\sigma_r(t, x), \frac{\partial}{\partial x}\right)^2 V \leqslant$$

$$\leqslant -a(t)\left|\left(R(x), \frac{\partial V}{\partial x}\right)\right| + k_1 a^2(t)\sum_{r=1}^{k}|\sigma_r(t, x)|^2 \leqslant$$

$$\leqslant -a(t)\left|\left(R(x), \frac{\partial V}{\partial x}\right)\right| + k_2 a^2(t)(1 + V(x)).$$

Поэтому доказываемое утверждение является следствием теоремы 3.8.3 (см. также задачу 3.8.4) при $F(x) = R(x)$, $q(t, x) \equiv 0$.

Теорема 2.2. *Пусть $X^x(t)$ — процесс, определяемый уравнением* (1.4), *функция $\frac{\partial f}{\partial x}$ непрерывна и существует неотрицательная функция $V(x) \in C_2^0$, удовлетворяющая условиям* (2.1), (2.3) *и неравенствам*

$$\left(\frac{\partial f(x)}{\partial x}, \frac{\partial V(x)}{\partial x}\right) < 0 \quad \textit{при} \quad x \overline{\in} B_2, \tag{2.5}$$

$$\left.\begin{aligned} &a(t)\left(\nabla_c f(x) - \frac{\partial f(x)}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial x}\right) \leqslant g(t)(1 + V(x)), \\ &\int_0^\infty g\,dt < \infty, \ \int_0^\infty a(t)\max_x\left|\nabla_c f(x) - \frac{\partial f(x)}{\partial x}\right|dt < \infty. \end{aligned}\right\} \tag{2.6}$$

Тогда процесс $X^x(t)$, $x \in E_l$, *сходится п. н. при* $t \to \infty$ *либо к одной из точек множества* $B_2 = \{x: \partial f/\partial x = 0\}$, *либо к границе одной из его связных компонент, если только*

$$a(t) > 0, \quad \int_0^\infty a(t)\,dt = \infty, \quad c(t) > 0, \quad \int_0^\infty \frac{a^2(t)}{c^2(t)}\,dt < \infty. \quad (2.7)$$

Доказательство. Учитывая (2.3), (2.5), (2.6) и условие $V(x) \in C_2^0$, имеем при $\beta(t) = a(t)/c(t)$

$$LV(x) = \frac{\partial V}{\partial t} + a(t)\left(\nabla_c f(x), \frac{\partial V(x)}{\partial x}\right) + \frac{\beta^2(t)}{2}\sum_{r=1}^{k}\left(\sigma_r(t, x), \frac{\partial}{\partial x}\right)^2 V \leqslant$$

$$\leqslant -a(t)\left|\left(\frac{\partial f(x)}{\partial x}, \frac{\partial V(x)}{\partial x}\right)\right| + a(t)\left(\nabla_c f(x) - \frac{\partial f(x)}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial x}\right) + k_3\beta^2(t)\sum_{r=1}^{k}|\sigma_r(t, x)|^2 \leqslant -a(t)\left|\left(\frac{\partial f(x)}{\partial x}, \frac{\partial V(x)}{\partial x}\right)\right| + (g(t) + k_4\beta^2(t))(1 + V(x)).$$

Значит, выполнены все условия теоремы 3.8.3, где $F(x) = \partial f/\partial x$, $q(t, x) = \nabla_c f(x) - \partial f/\partial x$ (см. также задачу 3.8.4). Теорема доказана.

Замечание 2.1. Условия (2.6) выполнены, если первая (или вторая) производная функция $f(x)$ удовлетворяют глобальному условию Липшица, интеграл $\int_0^\infty a(t)c(t)\,dt$ $\left(\text{или} \int_0^\infty a(t)c^2(t)\,dt\right)$ конечен и, кроме того,

$$\left|\frac{\partial V}{\partial x}\right| \leqslant K(1 + V(x))$$

(см. по этому поводу примеры 4.5.2, 4.5.3).

Задача 2.1. Показать, что теоремы 2.1, 2.2 остаются в силе, если входящее в них условие $V(x) \in C_2^0$ заменить условиями

$$V(x) \in C_2, \quad \sum_{r=1}^{k}\left(\sigma_r(t, x), \frac{\partial}{\partial x}\right)^2 V(x) \leqslant K(1 + V(x)),$$

Приведем один простой пример приложения теоремы 2.2.

Пример 2.1. Пусть для функции $f(x) \in C_2^0$ выполнены условия:

а) $\lim\limits_{|x|\to\infty} f(x) = -\infty$,

б) $a(t)\left(\nabla_c f - \frac{\partial f}{\partial x},\ \frac{\partial f}{\partial x}\right) \leqslant g(t)(1 + |f(x)|)$,

$$g(t) > 0, \quad \int\limits_0^\infty g\,dt < \infty, \quad \int\limits_0^\infty a(t) \max_x \left| \nabla_c f(x) - \frac{\partial f(x)}{\partial x} \right| dt < \infty,$$

в) $\sum\limits_{r=1}^{k} |\sigma_r(t, x)|^2 \leqslant K(1 + |f(x)|)$.

Тогда любое решение $X^x(t)$ уравнения (1.4) сходится п. н. к множеству B_2 при $t \to \infty$, если выполнены соотношения (2.7). Для доказательства достаточно заметить, что в этом случае в качестве функции $V(x)$, фигурирующей в теореме 2.2, можно взять функцию $V(x) = -f(x) + C$, где C — достаточно большая постоянная.

Следующие теоремы для дискретных процедур стохастической аппроксимации являются следствием теоремы 2.7.3 и замечаний 2.5.1, 2.7.1. Их доказательства аналогичны доказательству только что установленных утверждений. В этих теоремах используется обозначение $U_{\varepsilon, R}(B)$, введенное на стр. 54.

Теорема 2.3. *Пусть марковский процесс* $X^x(t)$ *определяется рекуррентно формулой* (1.5) *при начальном условии* $X^x(0) = x$ *и существует неотрицательная функция* $V(x) \in C_2^0$, *удовлетворяющая условиям* (2.1) *и неравенствам*

$$\sup_{x \in U_{\varepsilon,\, 1/\varepsilon}(B_1)} \left(R(x), \frac{\partial V(x)}{\partial x}\right) < 0 \quad \text{для} \quad \varepsilon > 0,$$

$$|R(x)|^2 + M\,|G(t, x, \omega)|^2 \leqslant K(1 + V(x)).$$

Если, кроме того,

$$a(t) > 0, \quad \sum_{t=0}^{\infty} a(t) = \infty, \quad \sum_{t=0}^{\infty} a^2(t) < \infty, \tag{2.8}$$

то для процесса $X^x(t)$ *справедливо заключение теоремы* 2.1.

Теорема 2.4. *Пусть марковский процесс $X^x(t)$ определяется соотношением (1.6) при начальном условии $X^x(0)=x$ и существует неотрицательная функция $V(x)\in C_2^0$, удовлетворяющая условию (2.1) и неравенствам*

$$a(t)\left(\nabla_c f-\frac{\partial f}{\partial x},\ \frac{\partial V}{\partial x}\right)\leqslant g(t)(1+V(x)),\quad \sum_{t=0}^{\infty} g(t)<\infty, \tag{2.9}$$

$$\sum_{t=0}^{\infty} a(t)\max_x|\nabla_c f(x)-\partial f/\partial x|<\infty, \tag{2.10}$$

$$\sup_{x\in U_{\varepsilon,\ 1/\varepsilon}(B_2)}\left(\frac{\partial f}{\partial x},\ \frac{\partial V}{\partial x}\right)<0 \quad \text{для} \quad \varepsilon>0,$$

$$|\nabla_c f(x)|^2+\mathsf{M}\,|G(t,\ x,\ \omega)|^2\leqslant K(1+V(x)),\qquad K=\mathrm{const}. \tag{2.11}$$

Если, кроме того

$$a(t)>0,\quad \sum_{t=0}^{\infty} a(t)=\infty,\qquad K>c(t)>0,\quad \sum_{t=0}^{\infty}\frac{a^2(t)}{c^2(t)}<\infty, \tag{2.12}$$

то для процесса $X^x(t)$ справедливо заключение теоремы 2.2.

Замечание 2.2. Условия (2.9), (2.10) выполнены, если первая (вторая) производная функции $f(x)$ удовлетворяют глобальным условиям Липшица, ряд $\sum\limits_{t=0}^{\infty} a(t)\,c(t)$ $\left(\text{или } \sum\limits_{t=0}^{\infty} a(t)\,c^2(t)\right)$ сходится и, кроме того, справедливо неравенство

$$\left|\frac{\partial V}{\partial x}\right|\leqslant K(1+V(x)).$$

§ 3. Вспомогательные результаты (непрерывное время)

В предыдущем параграфе были получены условия, при которых процедуры стохастической аппроксимации сходятся с вероятностью 1 к множествам B_1 или B_2. Однако оказывается, что иногда возможно гарантировать сходимость этих процедур к более узким, чем B_1 или B_2, множествам. К обсуждению такой возможности мы сейчас и переходим.

Рассмотрим сначала случай непрерывного времени. Для того чтобы охватить сразу процедуры Роббинса — Монро и Кифера — Вольфовица, запишем стохастическое дифференциальное уравнение в виде

$$dX = \alpha(t) F(t, X) + \beta(t) \sum_{r=1}^{k} \sigma_r(t, X)\, d\xi_r(t), \qquad (3.1)$$

$$F(t, X) = F(X) + q(t, X),$$

где $F(x) = R(x)$, $q(t, x) \equiv 0$, $\alpha(t) = \beta(t) = a(t)$ для процедуры (1.3) и $F(x) = \frac{\partial f(x)}{\partial x}$, $q(t, x) = \nabla_c f(x) - \frac{\partial f(x)}{\partial x}$, $\alpha(t) = a(t)$, $\beta(t) = a(t)/c(t)$ для процедуры (1.4).

В условиях теорем 2.1, 2.2 процесс $X^x(t)$, определяемый уравнением (3.1), сходится п. н. к множеству B стационарных точек системы, описываемой обыкновенным дифференциальным уравнением

$$dX = \alpha(t) F(X)\, dt. \qquad (3.2)$$

Среди точек множества B есть такие, к которым сходятся все решения $X_0(t)$ уравнения (3.2), начинающиеся в начальный момент времени в достаточно малой их окрестности. Это — устойчивые точки системы (3.2). Однако множество B может содержать и точки, не являющиеся устойчивыми в только что указанном смысле. В частности, точка $\tilde{x} \in B$ не будет устойчивой, если в некоторой ее ε-окрестности $U_\varepsilon(\tilde{x})$ существует непрерывно дифференцируемая функция $U(x)$ со свойствами

$$\begin{gathered} U(\tilde{x}) = 0, \qquad U(x) > 0 \quad \text{при} \quad x \neq \tilde{x}, \\ \left(F(x), \frac{\partial U}{\partial x}\right) \geqslant 0 \quad \text{при} \quad x \in U_\varepsilon(\tilde{x}). \end{gathered} \qquad (3.3)$$

Действительно, пусть некоторое решение $X_0^x(t)$, $x \neq \tilde{x}$, сходится к такой точке $\tilde{x}$. Тогда $X_0^x(t) \in U_\varepsilon(\tilde{x})$ начиная с некоторого момента времени t_0 и, значит,

$$\frac{dU(X_0^{x_1}(t))}{dt} = \alpha(t) \left(F\left(X_0^{x_1}(t)\right), \frac{\partial}{\partial x} U\right) \geqslant 0,\ x_1 = X_0^x(t_0),\ t \geqslant t_0.$$

Согласно этому соотношению

$$U\,(X_0^{x_1}\,(t)) \geqslant U\,(x_1),$$

что противоречит равенству $U\,(\tilde{x}) = 0$.

Возникает естественный вопрос о том, могут ли точки $\tilde{x} \in B$, не являющиеся устойчивыми для системы (3.2), быть с положительной вероятностью предельными для процесса $X^x\,(t)$, определяемого уравнением (3.1) при некотором $x \in E_l$.

Очевидно, без дополнительных предположений относительно матрицы диффузии $A\,(t,\ x) = ((a_{ij}\,(t,\ x))) = \sum_{r=1}^{k} \sigma_r\,(t,\,x)\,\sigma_r^*\,(t,\,x)$ ответ на этот вопрос, вообще говоря, положителен. Если, например,

$$\sigma_r\,(t,\ \tilde{x}) \equiv 0, \qquad r = 1,\ \ldots,\ k, \tag{3.4}$$

то $X^{\tilde{x}}\,(t) \equiv \tilde{x}$. Мы, тем не менее, покажем, что если для точки $\tilde{x}$ существует функция $U\,(x)$, удовлетворяющая условиям (3.3) и являющаяся квадратичной формой, то при минимальных ограничениях на матрицу диффузии $A\,(t,\,x)$ процесс $X^x\,(t)$ ни при каком $x \in E_l$ не может сходиться к $\tilde{x}$ с положительной вероятностью.

Точнее, обозначим через $\tilde{B}$ подмножество точек $\tilde{x}$ из B, подчиненных требованиям:

а) для каждой точки $\tilde{x} \in \tilde{B}$ существует симметричная положительно определенная матрица $C = C\,(\tilde{x})$ и число $\varepsilon = \varepsilon\,(\tilde{x})$ такие, что

$$(F\,(x),\ C\,(x - \tilde{x})) \geqslant 0 \text{ при } x \in U_\varepsilon\,(\tilde{x}),$$

б) для некоторых положительных постоянных a_1 и a_2 выполнены неравенства

$$a_1 \leqslant \operatorname{Sp} A\,(t,\,\tilde{x}) = \sum_{r=1}^{k} |\,\sigma_r\,(t,\,\tilde{x})\,|^2 \leqslant a_2.$$

Условие а) для точки $\tilde{x} \in B$ выполнено, если, например, функция $F\,(x)$ непрерывно дифференцируема, а все собственные числа матрицы[1]) $\frac{\partial F}{\partial x}(\tilde{x})$ имеют положительные действительные части. (Для доказательства достаточно воспользоваться равенством $F(x)=\frac{\partial F}{\partial x}(\tilde{x})(x-\tilde{x})+ + o(|x-\tilde{x}|)$ при $x\to\tilde{x}$ и применить лемму Ляпунова и следствие к ней (см. § 6.3) к матрице $-\frac{\partial F}{\partial x}(\tilde{x})$.)

Теорема 3.1. *Пусть $\tilde{x}\in\tilde{B}$, а вектор $F(t, x)$ и функции $\alpha(t)$, $\beta(t)$ удовлетворяют условиям*

$$1)\qquad \int_0^\infty \beta^2(t)\,dt<\infty,\quad \int_0^\infty \frac{\alpha(t)\,q(t)}{\sqrt{\psi(t)}}\,dt<\infty,$$

где

$$q(t)=\sup_{|x-\tilde{x}|<\delta}|F(t, x)-F(x)|,\ \ \psi(t)=\int_t^\infty \beta^2(u)\,du,\qquad \delta>0.$$

2) *для некоторых положительных постоянных δ, K, $\nu\leqslant 2$*

$$|\operatorname{Sp}[A(t, x)-A(t, \tilde{x})]|\leqslant K\,|x-\tilde{x}|^\nu$$

при $|x-\tilde{x}|<\delta$, $t\geqslant 1$.

Тогда для любого $x\in E_l$ решение $X^x(t)$ уравнения (3.1) *не может стремиться с положительной вероятностью при $t\to\infty$ к точке $\tilde{x}$.*

Перед доказательством этой теоремы приведем ряд лемм.

Лемма 3.1. *Пусть $\tilde{x}$ — точка из E_l, D — некоторая ограниченная область, содержащая $\tilde{x}$, причем существует неотрицательная функция $V(t, x)\in C_2$, для которой*

$$1)\ LV(t, x)\leqslant\gamma(t),\ \ t\geqslant 0,\ \ x\in D,\ \ \int_0^\infty \gamma\,dt<\infty,\ \text{где}$$

$$L=\frac{\partial}{\partial t}+\alpha(t)\left(F(t, x), \frac{\partial}{\partial x}\right)+\frac{\beta^2(t)}{2}\sum_{r=1}^{k}\left(\sigma_r(t, x), \frac{\partial}{\partial x}\right)^2,$$

---

[1]) Если $y=\varphi(x)$ — вектор-столбец из E_l, то $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$ есть матрица с элементами $\varphi_{ij}=\frac{\partial\varphi_i(x)}{\partial x_j}$.

2) $\lim\limits_{t\to\infty} V(t, x(t)) = \infty$ *для любой непрерывной функции* $x(t)$ *со значениями в* E_l, *стремящейся к* $\tilde{x}$ *при* $t\to\infty$.

Тогда для любого решения $X^x(t)$ *уравнения* (3.1) *справедливо равенство*

$$\mathsf{P}\,\{\lim_{t\to\infty} X^x(t) = \tilde{x}\} = 0.$$

Доказательство. Обозначим $\tau = \tau^x$ момент первого выхода траектории процесса $X^x(t)$, $x \in D$, из области D. Тогда в силу условия 1)

$$L\left(\exp\left\{\int\limits_t^\infty \gamma\,ds\right\} V(t, x)\right) = \exp\left\{\int\limits_t^\infty \gamma\,ds\right\}[LV - \gamma] \leqslant 0$$

и, значит (см. лемму 3.8.1)

$$\left(\exp\left\{\int\limits_{\tau\wedge t}^\infty \gamma(s)\,ds\right\} V(\tau\wedge t, X(\tau\wedge t)),\ \mathscr{N}_t\right)$$

— супермартингал. Поэтому по теореме 3.6.1 существует с вероятностью 1 конечный предел

$$\lim_{t\to\infty} V(\tau\wedge t, X^x(\tau\wedge t)) = \eta.$$

Из конечности η и условия 2) немедленно вытекает для любого $x \in D$ равенство

$$P\{\tau = \infty,\ \lim_{t\to\infty} X^x(t) = \tilde{x}\} = 0.$$

Это равенство означает, что траектория процесса $X^x(t)$, начинающаяся в начальный момент времени из любой точки $x \in D$, с вероятностью 1 либо не стремится при $t\to\infty$ к $\tilde{x}$, либо выходит из D за конечное время. Отсюда вытекает утверждение леммы [1]).

Замечание 3.1. Лемма 3.1 остается, очевидно, в силе и для ограниченных снизу функций $V(t, x)$, так как в этом случае можно рассмотреть функцию $V_1(t, x) = V(t, x) + c$, где c — достаточно большая постоянная.

Лемма 3.2. *Если* $\alpha(t, x) = ((\alpha_{ij}(t)))$, $t \geqslant 0$, $x \in E_n$, — *симметричная неотрицательно определенная*

[1]) Более точно, здесь следует применить строго марковское свойство процесса $X^x(t)$. Аналогичные рассуждения см. ниже, при доказательстве теоремы 7.2.1.

матрица, а $U = U(x) = (Cx, x)$, $C = ((c_{ij}))$, $c_{ij} = c_{ji}$, $i, j = 1, \ldots, n$,— *положительно определенная квадратичная форма, то*

$$2U \operatorname{Sp}[\alpha(t, x) C] = U \sum_{i, j=1}^{n} \alpha_{ij}(t, x) \frac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial x_j} \geqslant \frac{1}{2} \sum_{i, j=1}^{n} \alpha_{ij}(t, x) \frac{\partial U}{\partial x_i} \frac{\partial U}{\partial x_j}. \quad (3.5)$$

Доказательство. Неравенство в (3.5) эквивалентно, очевидно, неравенству

$$\operatorname{Sp}[\alpha(t, x) f(x)] \geqslant 0, \quad (3.6)$$

где $f(x) = ((f_{ij}(x)))$ — матрица с элементами

$$f_{ij}(x) = c_{ij} \sum_{k, l=1}^{n} c_{kl} x_k x_l - \sum_{k=1}^{n} c_{ik} x_k \sum_{l=1}^{n} c_{jl} x_l.$$

Для справедливости же (3.6) достаточно установить неотрицательную определенность матрицы $f(x)$ при любом фиксированном x. С этой целью заметим, что

$$(f(x) y, y) = (Cy, y)(Cx, x) - (Cx, y)^2 \geqslant 0,$$

каков бы ни был вектор $y \in E_n$.

Лемма 3.3. *Функция*

$$W(z) = \int_0^z dv \int_0^v \frac{e^{u-v}}{\sqrt{uv}} du, \qquad z \geqslant 0, \quad (3.7)$$

трижды непрерывно дифференцируема при $z \geqslant 0$ *и удовлетворяет условиям*

$$2zW'' + W' = 2 - 2zW', \quad (3.8)$$

$$W(z) = \ln z + O(1), \qquad z \to \infty, \quad (3.9)$$

$$z|1 - zW'| + W'(z) z + |W''(z)| z^2 + W'''(z) z^3 < c, \qquad c = \text{const}, \quad (3.10)$$

$$W''(z) < 0, \quad W'''(z) > 0. \quad (3.11)$$

Доказательство. Соотношение (3.8) проверяется непосредственно, а (3.9), (3.10) вытекают из устанавливаемых интегрированием по частям формул

$$W^{(i)}(z) = \frac{(-1)^{i-1}(i-1)!}{z^i} + O\left(\frac{1}{z^{i+1}}\right), \qquad z \to \infty, \quad i = 1, 2, 3.$$

Далее, для функции $W''(z)$ справедливо равенство

$$z\sqrt{z}\,e^z W''(z) = 2(z+1/2)\,\Phi_1(z),$$

где

$$\Phi_1(z) = \int_0^z e^u \sqrt{u}\,du - \frac{z\sqrt{z}e^z}{z+1/2}.$$

Функция же $\Phi_1(z)$ обращается в нуль в точке $z=0$ и, кроме того,

$$\Phi_1'(z) = -\frac{z\sqrt{z}e^z}{2(z+1/2)^2} < 0 \quad \text{при} \quad z>0.$$

Отсюда при $z > 0$ вытекает неравенство $W''(z) < 0$. С помощью предельного перехода нетрудно также установить, что и $W''(0) = -8/3 < 0$.

Аналогично, функция $W'''(z)$ удовлетворяет соотношению

$$\frac{e^z z^{5/2} W'''(z)}{2(z^2+z+3/4)} = \Phi_2(z),$$

где

$$\Phi_2(z) = \Phi_3(z)\,e^z - \int_0^z e^u\sqrt{u}\,du, \quad \Phi_3(z) = \frac{z^{3/2}(z+1/2)}{z^2+z+3/4}.$$

Функция же $\Phi_2(z)$ обращается в нуль при $z=0$ и, кроме того,

$$\Phi_2'(z) = \left(\Phi_3'(z) + \Phi_3(z) - \sqrt{z}\right)e^z =$$

$$= \frac{e^z z\sqrt{z}}{(z^2+z+3/4)^2} > 0 \quad \text{при} \quad z > 0.$$

Отсюда при $z>0$ вытекает неравенство $W'''(z) > 0$. С помощью предельного перехода устанавливаем также, что $W'''(0) = 16/15 > 0$. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 3.1. Не ограничивая общности, можно считать $x = 0$. Покажем, что существует функция $V(t, x)$, удовлетворяющая условиям леммы 3.1. С этой целью положим

$$V(t, x) = T(t) - W(z), \qquad z = U(x)/\varphi(t), \quad (3.12)$$

где $W(z)$ — функция, определенная в лемме 3.3, $U(x) = (Cx, x)$ — квадратичная форма, входящая в определение множества $\widetilde{B}$ и удовлетворяющая при $|x| < \varepsilon$ соотношениям (3.3), а $T(t)$, $\varphi(t)$ будут выбраны ниже.

Пусть $|x| < \min(\varepsilon, \delta) = \varepsilon_1$. Нетрудно видеть, что

$$LV(t, x) = T'(t) + W'(z)\, z\, \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)} - \frac{\alpha(t) W'(z)}{\varphi(t)} \left(F(x), \frac{\partial U}{\partial x}\right) - \\ - \frac{\alpha(t) W'(z)}{\varphi(t)} \left(F(x, t) - F(x), \frac{\partial U}{\partial x}\right) - \\ - \frac{\beta^2(t)}{2\varphi(t)} \sum_{i, j=1}^{l} a_{ij}(t, x) \left[\frac{W''(z)}{\varphi(t)} \frac{\partial U}{\partial x_i} \frac{\partial U}{\partial x_j} + W'(z) \frac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial x_j}\right]. \quad (3.13)$$

В силу леммы 3.2 и неравенства $W''(z) < 0$ справедливы соотношения

$$- \sum_{i, j=1}^{l} a_{ij}(t, x) \frac{W''(z)}{\varphi(t)} \frac{\partial U}{\partial x_i} \frac{\partial U}{\partial x_j} \leqslant \\ \leqslant - \frac{2W''(z)}{\varphi(t)} U(x) \sum_{i, j=1}^{l} a_{ij}(t, x) \frac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial x_j} \leqslant \\ \leqslant -4W''(z)\, z \operatorname{Sp}[A(t, x) C].$$

Поэтому, принимая во внимание (3.3), находим из (3.13)

$$LV(t, x) \leqslant T'(t) + \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)} W'(z)\, z + \frac{\alpha(t) q(t)}{\varphi(t)} W'(z) \left|\frac{\partial U}{\partial x}\right| - \\ - \frac{\beta^2(t)}{2\varphi(t)} (2W''z + W') \{\operatorname{Sp} A(t, 0) C + \operatorname{Sp}[(A(t, x) - A(t, 0)) C]\}.$$

Значит, согласно неравенствам (см. второе условие теоремы)

$$|\operatorname{Sp}[(A(t, x) - A(t, 0)) C]| \leqslant k_1 |x - \widetilde{x}|^{\nu} \quad \text{при} \quad |x| < \varepsilon_1, \\ \left|\frac{\partial U}{\partial x}\right| \leqslant k_2 |x|$$

и (3.8), можно утверждать, что

$$LV(t, x) \leqslant T'(t) - 2\mu(t) \frac{\beta^2(t)}{\varphi(t)} + \left(\frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)} + 2\mu(t) \frac{\beta^2(t)}{\varphi(t)}\right) W'(z)\, z + \\ + k_2 \frac{\alpha(t) q(t) W'(z) |x|}{\varphi(t)} + k_3 \frac{\beta^2(t)}{\varphi(t)} |1 - zW'(z)|\, |x|^{\nu}.$$

где $\mu(t) = \operatorname{Sp}[A(t, 0) C]$, k_i — положительные постоянные. Выберем теперь функции $\varphi(t)$ и $T(t)$ так, чтобы удовлетворялись уравнения

$$\frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)} + 2\mu(t)\frac{\beta^2(t)}{\varphi(t)} = 0, \quad T' = 2\mu(t)\frac{\beta^2(t)}{\varphi(t)}.$$

Можно, например, положить

$$\varphi(t) = 2\int_t^\infty \mu(u)\beta^2(u)\,du,$$

$$T(t) = 2\int_0^t \frac{\mu(u)\beta^2(u)}{\varphi(u)}\,du = -\ln\frac{\varphi(t)}{\varphi(0)}. \qquad (3.14)$$

Тогда, поскольку $\sqrt{U(x)} \geqslant k_4|x|$, то

$$LV(t, x) \leqslant k_5\left[\frac{\alpha(t)q(t)W'(z)\sqrt{z}}{\sqrt{\varphi(t)}} + \frac{\beta^2(t)\,|1 - zW'(z)|z^{\nu/2}}{(\varphi(t))^{1-\nu/2}}\right],$$

откуда, согласно ограниченности функций $W'(z)\sqrt{z}$, $|1 - zW'(z)|z^{\nu/2}$ (см. (3.10)), получим окончательно неравенство

$$LV(t, x) \leqslant k_6\left[\frac{\alpha(t)q(t)}{\sqrt{\varphi(t)}} + \frac{\beta^2(t)}{(\varphi(t))^{1-\nu/2}}\right] = \gamma(t).$$

Заметим, наконец, что так как $\varphi(t) \geqslant a_1\psi(t)$, то

$$\int_1^\infty \frac{\beta^2(u)\,du}{(\varphi(u))^{1-\nu/2}} \leqslant k_7\int_0^{\psi(1)} \frac{du}{u^{1-\nu/2}} < \infty$$

и, значит, в силу первого условия теоремы, функция $\gamma(t)$ интегрируема на бесконечном интервале. Таким образом, $V(t, x)$ удовлетворяет первому условию леммы 3.1, если в качестве области D выбрана некоторая окрестность начала координат.

Пусть теперь $x(t)$ — произвольная непрерывная функция со значениями из E_l, для которой $\lim\limits_{t\to\infty} x(t) = 0$. Так как в силу (3.7), (3.9) для некоторой положительной постоянной c при всех $z \geqslant 0$ справедливо неравенство

$$W(z) < \ln(1 + z) + c,$$

то (см. (3.14))

$$V(t, x(t)) = T(t) - W\left(\frac{U(x(t))}{\varphi(t)}\right) \geqslant$$
$$\geqslant \ln\frac{\varphi(0)}{\varphi(t)} - \ln\left(1+\frac{U(x(t))}{\varphi(t)}\right) - c \geqslant$$
$$\geqslant \ln\varphi(0) - \ln(\varphi(t) + U(x(t))) - c \to \infty \quad \text{при} \quad t \to \infty,$$

т. е. функция $V(t, x)$ удовлетворяет и второму условию леммы 3.1. Нетрудно также видеть, что $V(t, x)$ ограничена снизу по $t \geqslant 0$, $x \in D$. Отсюда (см. замечание 3.1) вытекает утверждение теоремы.

§ 4. Вспомогательные результаты (дискретное время)

Рассмотрим теперь рекуррентное соотношение

$$\begin{gathered} X(t+1) - X(t) = \\ = \alpha(t) F(t, X(t)) + \beta(t) G(t+1, X(t), \omega) = \\ = \Phi(t+1, X(t), \omega), \\ F(t, X) = F(X) + q(t, X), \\ X(0) = x,\ t = 0, 1, 2, \ldots, \end{gathered} \tag{4.1}$$

частным случаем которого являются дискретные процедуры РМ и КВ.

В § 2 были получены условия, при которых дискретные процедуры с. а. сходятся п. н. при $t \to \infty$ к множеству $B = \{x: F(x) = 0\}$ стационарных точек системы

$$X(t+1) - X(t) = \alpha(t) F(X(t)), \tag{4.2}$$

где $F(x) = R(x)$ — для процедуры РМ и $F(x) = \partial f/\partial x$ — для процедуры КВ.

Соображения, аналогичные развитым в § 3 для случая непрерывного времени, наводят на мысль, что процесс $X^x(t)$, описываемый соотношениями (4.1), не может с положительной вероятностью сходиться к некоторым из точек $\tilde{x} \in B$. Точный результат в этом направлении содержит следующая теорема, в которой $\tilde{B}$ — подмножество точек $\tilde{x}$ из B, подчиненных требованиям а), б) § 3, где

$A(t, x)$ — матрица с элементами $\mathsf{M}G_i(t+1, x, \omega)\times$ $\times G_j(t+1, x, \omega)$.

Теорема 4.1. *Пусть $\tilde{x}\in \tilde{B}$, а векторы $F(t, x)$, $G(t, x, \omega)$ и последовательности $\alpha(t)$, $\beta(t)$ удовлетворяют условиям:*

1) *существуют такие положительные постоянные δ, K, $\nu\leqslant 2$, что*

$$|F(x)|^2+|\operatorname{Sp}[A(t, x)-A(t, \tilde{x})]|\leqslant K|x-\tilde{x}|^\nu$$

$$\text{при } |x-\tilde{x}|<\delta,\ t\geqslant 1,$$

2) $$\sup_{t\geqslant 1,\,|x-\tilde{x}|<\delta}\mathsf{M}|G(t, x, \omega)|^4<\infty, \tag{4.3}$$

3) *ряды*

$$\sum_{t=0}^{\infty}\beta^2(t),\quad \sum_{t=0}^{\infty}\frac{\alpha(t)\,q(t)}{\sqrt{\psi(t+1)}},\quad \sum_{t=0}^{\infty}\left(\frac{\beta(t)}{\sqrt{\psi(t+1)}}\right)^3,$$

где

$$\psi(t)=\sum_{k=t}^{\infty}\beta^2(k),\qquad q(t)=\sup_{|x-\tilde{x}|<\delta}|F(t, x)-F(x)|,$$

сходятся, причем $\alpha(t)\leqslant K\beta(t)$.

Тогда процесс $X^x(t)$, описываемый соотношением (4.1), *не может сходиться с положительной вероятностью к точке $\tilde{x}$ при $t\to\infty$ ни при каком $x\in E_l$.*

Перед доказательством этой теоремы сформулируем следующий вспомогательный результат, который устанавливается точно так же, как и лемма 3.1.

Лемма 4.1. *Пусть $\tilde{x}$ — точка из E_l, D — некоторая ограниченная область, содержащая $\tilde{x}$, причем существует ограниченная снизу функция $V(t, x)$, для которой*

1) $LV(t, x)\leqslant\gamma(t)$ *при* $t\geqslant t_0$, $x\in D$,

где $\sum\limits_{t=1}^{\infty}\gamma(t)<\infty$ (L — *производящий оператор процесса* (4.1)).

2) $\lim\limits_{t\to\infty} V(t, x(t))=\infty$ *для любой последовательности точек $x(t)\in E_l$, сходящейся к $\tilde{x}$ при $t\to\infty$.*

Тогда $\mathsf{P}\{\lim\limits_{t\to\infty}X^x(t)=\tilde{x}\}=0$ *для всех* $x\in E_l$.

Доказательство теоремы 4.1. Не ограничивая общности, можно считать $\bar{x} = 0$. Достаточно показать, что существует функция $V(t, x)$, удовлетворяющая условиям леммы 4.1. По аналогии со случаем непрерывного времени (см. формулы (3.12), (3.14)), положим $V(t, x) = T(t) - W(z)$, $z = U(x)/\varphi(t)$, где $W(z)$ — функция, определенная в лемме 3.3, $U(x) = (Cx, x)$ — квадратичная форма, входящая в определение множества $\bar{B}$ и удовлетворяющая при $|x| < \varepsilon$ соотношениям (3.3),

$$\varphi(t) = 2\sum_{u=t}^{\infty} \mu(u)\beta^2(u), \qquad T(t) = -\ln\varphi(t),$$

$$\mu(t) = \operatorname{Sp}[A(t, 0)C].$$

Пусть $|x| < \min(\varepsilon, \delta)$. Очевидно,

$$LV(t, x) = T(t+1) - T(t) - W'(z)\,\mathsf{M}y - \\ - \frac{W''(z)}{2}\mathsf{M}y^2 + R(t, x), \qquad (4.4)$$

где

$$y = \frac{U(x + \Phi(t+1, x, \omega))}{\varphi(t+1)} - \frac{U(x)}{\varphi(t)},$$

$$R(t, x) = -\frac{1}{2}\mathsf{M}[W''(z + \theta_1 y) - W''(z)]\,y^2,$$

$$0 < \theta_1 = \theta_1(t, x, \omega) < 1.$$

При этом, поскольку $U(x)$ — квадратичная форма, то

$$y = [\varphi(t+1)]^{-1}\cdot[2\mu(t)\beta^2(t)z + 2(\Phi(t+1, x, \omega), Cx) + \\ + (C\Phi(t+1, x, \omega), \Phi(t+1, x, \omega))] \qquad (4.5)$$

Подставляя (4.5) в (4.4), получим после простых вычислений равенство

$$LV = T(t+1) - T(t) - \frac{W'(z)\,2\mu(t)\beta^2(t)z}{\varphi(t+1)} - \\ - \frac{W'(z)}{\varphi(t+1)}\mathsf{M}(C\Phi(t+1, x, \omega), \Phi(t+1, x, \omega)) - \\ - \frac{2W''(z)}{\varphi^2(t+1)}\mathsf{M}(\Phi(t+1, x, \omega), Cx)^2 - \frac{2W'(z)}{\varphi(t+1)}\alpha(t)(F(t, x) - \\ - F(x), Cx) - \frac{2W'(z)}{\varphi(t+1)}\alpha(t)(F(x), Cx) + I(t, x) + R(t, x), \qquad (4.6)$$

где

$$I(t, x) = -\frac{W''(z)}{2\varphi^2(t+1)}\{4\mu^2(t)\beta^4(t)z^2 + \mathsf{M}(C\Phi(t+1, x, \omega), \Phi(t+1, x, \omega))^2 + 4\mu(t)\beta^2(t)z\mathsf{M}[2(\Phi(t+1, x, \omega), Cx) + (C\Phi(t+1, x, \omega), \Phi(t+1, x, \omega))] + 4\mathsf{M}(\Phi(t+1, x, \omega), Cx)(C\Phi(t+1, x, \omega), \Phi(t+1, x, \omega))\}.$$

Из леммы 3.2, согласно которой

$$\mathsf{M}(\Phi(t+1, x, \omega), Cx)^2 \leqslant U(x)\,\mathsf{M}(C\Phi(t+1, x, \omega), \Phi(t+1, x, \omega)),$$

и неравенства $W''(z) < 0$ имеем

$$-\frac{W'(z)}{\varphi(t+1)}\mathsf{M}(C\Phi(t+1, x, \omega), \Phi(t+1, x, \omega)) - \frac{2W''(z)}{\varphi^2(t+1)}\mathsf{M}(\Phi(t+1, x, \omega), Cx)^2 \leqslant$$
$$\leqslant -\left(\frac{W'(z)}{\varphi(t+1)} + \frac{2W''(z)U(x)}{\varphi^2(t+1)}\right) \times \mathsf{M}(C\Phi(t+1, x, \omega), \Phi(t+1, x, \omega)) \leqslant$$
$$\leqslant -\left(W'(z) + 2W''(z)z\frac{\varphi(t)}{\varphi(t+1)}\right) \times \frac{\mathsf{M}(C\Phi(t+1, x, \omega), \Phi(t+1, x, \omega))}{\varphi(t+1)}.$$

Так как, кроме того,

$$\frac{\varphi(t)}{\varphi(t+1)} = 1 + \frac{2\mu(t)\beta^2(t)}{\varphi(t+1)},$$

а функция $W(z)$ удовлетворяет соотношению (3.8), то

$$-\frac{W'(z)}{\varphi(t+1)}\mathsf{M}(C\Phi(t+1, x, \omega), \Phi(t+1, x, \omega)) - \frac{2W''(z)}{\varphi^2(t+1)}\mathsf{M}(\Phi(t+1, x, \omega), Cx)^2 \leqslant$$
$$\leqslant -\left(2 - 2zW'(z) + \frac{4W''(z)z\mu(t)\beta^2(t)}{\varphi(t+1)}\right) \times \frac{\mathsf{M}(C\Phi(t+1, x, \omega), \Phi(t+1, x, \omega))}{\varphi(t+1)}.$$

Из (4.6) и последнего неравенства, учитывая также (3.3), получим

$$LV \leqslant T(t+1) - T(t) - \\ - \frac{2\mathsf{M}(C\Phi(t+1, x, \omega), \Phi(t+1, x, \omega))}{\varphi(t+1)} - \\ - \frac{2W'(z)z}{\varphi(t+1)}[\mu(t)\beta^2(t) - \mathsf{M}(C\Phi(t+1, x, \omega), \Phi(t+1, x, \omega))] + \\ + \frac{k_1 W'(z)\alpha(t)}{\varphi(t+1)} q(t)|x| - \frac{4W''(z) z\mu(t)\beta^2(t)}{\varphi^2(t+1)} \times \\ \times \mathsf{M}(C\Phi(t+1, x, \omega), \Phi(t+1, x, \omega)) + I(t, x) + R(t, x).$$

(Здесь и ниже k_i — положительные постоянные.)

Поскольку, далее, функция $W''(z)z$ ограничена

$$\mathsf{M}(C\Phi(t+1, x, \omega), \Phi(t+1, x, \omega)) = \\ = \alpha^2(CF(t, x), F(t, x)) + \\ + \beta^2 \operatorname{Sp}(A(t, x) - A(t, 0))C + \beta^2(t)\mu(t),$$

$|x| < k_2\sqrt{U}$, а $\mu(t)$ ограничена снизу, то последнее неравенство можно записать в виде

$$LV \leqslant T(t+1) - T(t) - \frac{2\beta^2(t)\mu(t)}{\varphi(t+1)} - \frac{2-2zW'}{\varphi(t+1)} \times \\ \times \{\alpha^2(CF(t, x), F(t, x)) + \beta^2 \operatorname{Sp}[(A(t, x) - A(t, 0))C]\} + \\ + k_3\left[\frac{\alpha(t)q(t)}{\sqrt{\psi(t+1)}} + \frac{\beta^4(t)}{\psi^2(t+1)}\right] + I(t, x) + R(t, x).$$

Заметим еще, что в силу условия 1) теоремы

$$|\alpha^2(CF(t, x), F(t, x)) + \\ + \beta^2 \operatorname{Sp}[(A(t, x) - A(t, 0))C]| \leqslant \\ \leqslant k_4[\alpha^2(t)q^2(t) + \beta^2|x|^\nu]$$

и, кроме того,

$$T(t+1) - T(t) - 2\beta^2(t)\mu(t)/\varphi(t+1) = \\ = \ln(1 + 2\beta^2(t)\mu(t)/\varphi(t+1)) - \frac{2\beta^2(t)\mu(t)}{\varphi(t+1)} \leqslant 0.$$

Поэтому

$$LV \leqslant k_5 \frac{\beta^2(t)}{\psi^{1-\frac{\nu}{2}}(t+1)} + k_6 \left[\frac{\alpha(t)\, q(t)}{\sqrt{\psi(t+1)}} + \frac{\beta^4(t)}{\psi^2(t+1)} \right] + I(t, x) + R(t, x). \quad (4.7)$$

Используя ограниченность функций $W'(z)\, z$, $W''(z)\, z^2$, неравенства

$$|F(t, x)| \leqslant |F(x)| + |q(t)|,$$
$$\alpha(t) \leqslant K\beta(t), \quad \beta(t) \leqslant k_7 \sqrt{\psi(t+1)}$$

и оценивая величины $(C\Phi(t+1, x, \omega), \Phi(t+1, x, \omega))$, $(\Phi(t+1, x, \omega), Cx)$ с помощью неравенства Коши — Буняковского, получим, что

$$|I(t)| \leqslant k_8 \left[\left(\frac{\beta(t)}{\sqrt{\psi(t)}} \right)^3 + \frac{q(t)\, \alpha(t)}{\sqrt{\psi(t+1)}} \right]. \quad (4.8)$$

Осталось оценить остаток $R(t, x)$. С этой целью заметим, что в силу равенства

$$W''(z+\theta_1 y) - W''(z) = W'''(z+\theta_2 y)\, \theta_1 y,$$
$$0 < \theta_2 = \theta_2(t, x, \omega) < 1$$

$R(t, x)$ можно записать в виде $R(t, x) = R_1(t, x) + R_2(t, x)$, где

$$\begin{aligned} R_1(t, x) &= -1/2\mathsf{M} W'''(z+\theta_2 y)\, \theta_1 y^3 \chi_\Gamma, \\ R_2(t, x) &= -1/2\mathsf{M} [W''(z+\theta_1 y) - W''(z)]\, y^2 \chi_{\overline{\Gamma}}. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Здесь χ_Γ — характеристическая функция множества $\Gamma = \{\omega: z/2 + \theta_2 y > 0\}$. Из (4.5) вытекает соотношение

$$y > -\frac{k_9 \sqrt{z}\, |\Phi(t+1, x, \omega)|}{\sqrt{\psi(t+1)}}. \quad (4.10)$$

Поэтому, в силу положительности $W'''(z)$ и ограниченности функции $W'''(z+\theta_2 y)(\sqrt{z})^3 \chi_\Gamma$,

$$R_1(t, x) \leqslant$$
$$\leqslant \frac{k_{10}}{(\sqrt{\psi(t+1)})^3} \mathsf{M} W'''(z+\theta_2 y)(\sqrt{z})^3 |\Phi(t+1, x, \omega)|^3 \chi_\Gamma \leqslant$$
$$\leqslant \frac{k_{11}\mathsf{M}\, |\Phi(t+1, x, \omega)|^3}{(\sqrt{\psi(t+1)})^3} \leqslant k_{12} \frac{\beta^3(t) + \alpha^3(t)\, q^3(t)}{(\sqrt{\psi(t+1)})^3}. \quad (4.11)$$

Для оценки величины $R_2(t, x)$ заметим, что из неравенства $z/2 + \theta_2 y \leqslant 0$ вытекает неравенство $y \leqslant 0$ и, значит, согласно (4.9),

$$R_2(t, x) \leqslant$$
$$\leqslant \frac{k_{13}}{\psi(t+1)} \mathsf{M} \,|\, W''(z+\theta_1 y) - W''(z) \,|\, |\Phi(t+1, x, \omega)|^2 \chi_{\Gamma} z. \tag{4.12}$$

Используя теперь очевидное включение

$$\bar{\Gamma} \subset \left\{\omega \colon \sqrt{z} < \frac{k_{14}}{\sqrt{\psi(t+1)}} |\Phi(t+1, x, \omega)|\right\},$$

находим из (4.12)

$$R_2(t, x) \leqslant \frac{k_{15}}{\psi^2(t+1)} \mathsf{M} \,|\Phi(t+1, x, \omega)|^4 \leqslant k_{16} \frac{\beta^4 + \alpha^4(t) q^4(t)}{\psi^2(t+1)}. \tag{413}$$

Принимая во внимание (4.7), (4.8), (4.11), (4.13), окончательно получаем оценку

$$LV \leqslant k_{17} \left[\frac{\beta^2(t)}{\psi^{1-\nu/2}(t+1)} + \frac{\alpha(t) q(t)}{\sqrt{\psi(t+1)}} + \left(\frac{\beta(t)}{\sqrt{\psi(t+1)}}\right)^3\right] = \gamma(t),$$

причем, как это вытекает из утверждения 5 на стр. 293 книги Фихтенгольца [1] и условий 3) теоремы, ряд $\sum_{t=0}^{\infty} \gamma(t)$ сходится.

Наконец, точно так же, как и при доказательстве теоремы 3.1 убеждаемся, что $V(t, x(t)) \to \infty$ при $t \to \infty$ для любой сходящейся к нулю последовательности векторов $x(t)$ из E_l. Таким образом, выполнены все условия леммы 4.1. Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 4.1. По сравнению с теоремой 3.1, в теореме 4.1 содержится дополнительное условие $\sum_{t=0}^{\infty} (\beta(t)/\sqrt{\psi(t+1)})^3 < \infty$ на последовательность $\beta(t)$. Это условие всегда выполнено, если $\beta(t) \sim k_1/t^q$, $q > 1/2$ при $t \to \infty$. В самом деле, в этом случае

$$\psi(t+1) = \sum_{i=t+1}^{\infty} \beta^2(i) \sim k_2/t^{2q-1}$$

и, значит, $(\beta(t)/\sqrt{\psi(t+1)})^3 \sim k_3/t^{3/2}$.

§ 5. Одномерные процедуры

Теоремы 3.1 и 4.1 позволяют (при некоторых дополнительных условиях) уточнить результаты § 2 о предельном поведении процесса с. а. $X^x(t)$, так как согласно этим теоремам процесс $X^x(t)$ не может сходиться к точкам $\tilde{x} \in \tilde{B} \subset B$.

Мы ограничимся здесь для простоты одномерными процедурами, хотя соответствующие результаты могут быть легко получены и для процессов с. а. в E_l.

В одномерном случае нетрудно дать простое условие для того, чтобы точка $\tilde{x} \in B = \{x: F(x) = 0\}$ не являлась устойчивой в смысле § 2 для уравнений

$$dX = \alpha(t) F(X(t))\, dt, \quad X(t+1) - X(t) = \alpha(t) F(X(t)).$$

Именно, такими точками будут те точки $\tilde{x}$, для которых $F(x)(x - \tilde{x}) \geqslant 0$ в некоторой окрестности $\tilde{x}$. Поэтому для процессов стохастической аппроксимации в E_1 можно получить довольно простые результаты о сходимости.

Будем предполагать, что множества B_1 и B_2, где функции $R(x)$ и $f'(x)$ соответственно обращаются в нуль, состоят из конечного числа отрезков и конечного числа точек. Введем также множества

$$\tilde{B}_1 = \{x: R(\tilde{x}) = 0, \ \inf_{t \geqslant 0} A(t, \tilde{x}) > 0, \ R(x)(x - \tilde{x}) \geqslant 0 \text{ в некоторой окрестности точки } \tilde{x}\},$$

$$\tilde{B}_2 = \{\tilde{x}: f'(\tilde{x}) = 0, \ \inf_{t \geqslant 0} A(t, \tilde{x}) > 0, \ f'(x)(x - \tilde{x}) \geqslant 0 \text{ в некоторой окрестности точки } \tilde{x}\},$$

где $A(t, x) = \sigma^2(t, x)$, если время непрерывно, и $A(t, x) = \mathsf{M}G^2(t+1, x, \omega)$, если время дискретно. Заметим, что изолированные точки $x \in \tilde{B}_2$ являются точками локального минимума функции $f(x)$.

Теорема 5.1. *Пусть для некоторого* $r > 0$

$$R(x)\, x < 0 \text{ при } |x| > r, \quad \sup \sigma^2(t, x) < \infty,$$

в любой окрестности каждой точки x функция $\sigma(t, x)$ удовлетворяет условию Гельдера по x равномерно отно-

сительно $t > 0$, *а функция* $a(t)$ *удовлетворяет соотношениям* (2.4). *Тогда любое решение* $X^x(t)$, $x \in E_1$, *уравнения*

$$dX(t) = a(t)[R(X(t)) + \sigma(t, X(t))\, d\xi(t)], \qquad X(0) = x$$

($\xi(t)$ — *стандартный винеровский процесс*) *сходится п. н. при* $t \to \infty$ *к одной из точек множества* $B_1 \setminus \widetilde{B}_1$.

Доказательство. Рассмотрим положительную функцию $V(x) \in C_2$, удовлетворяющую условиям:

1) $R(x)V'(x) < 0$ при $x \overline{\in} B_1$,

2) $V(x)$ линейна при $|x| > r$. (Такая функция всегда существует. Например, если $R'(x)$ непрерывна, то при $|x| \leqslant r$ можно положить

$$V(x) = -\int_0^x R(u)\, du + C).$$

Тогда

$$\sigma^2(t, x) V'' \leqslant k,$$

если k — достаточно большая положительная постоянная, поскольку $\partial^2 V/\partial x^2 \equiv 0$ при $|x| > r$. Поэтому из теоремы 2.1 вытекает, что $X^x(t)$ сходится к одной из точек множества B_1. В силу же теоремы 3.1, условия которой, очевидно, также выполнены при $F(x) = R(x)$,

$$q(t, x) \equiv 0, \ \alpha(t) = \beta(t) = a(t)$$

$$\mathsf{P}\{\lim_{t\to\infty} X^x(t) = \widetilde{x}\} = 0,$$

если $\widetilde{x} \in \widetilde{B}_1$. Теорема доказана.

Теорема 5.2. *Пусть функция* $f'(x)$ *удовлетворяет условию Липшица и для некоторого* $r > 0$

$$f'(x)\, x < 0 \qquad \text{при } |x| > r,$$

а функция $\sigma(t, x)$ *удовлетворяет условиям теоремы* 5.1. *Пусть, далее, для функций* $a(t)$, $c(t)$ *выполнены соотношения* (2.7) *и, кроме того,*

$$\int_0^\infty \frac{a(t)\, c(t)\, dt}{\sqrt{\int_t^\infty \frac{a^2(u)}{c^2(u)}\, du}} < \infty. \tag{5.1}$$

Тогда любое решение $X^x(t)$, $x \in E_1$, уравнения

$$dX(t) = \frac{a(t)}{c(t)}\left[\frac{f(X(t)+c(t)) - f(X(t)-c(t))}{2} + \sigma(t, X(t))\, d\xi(t)\right],$$
$$X(0) = x,$$

сходится п. н. при $t \to \infty$ к одной из точек множества $B_2 \setminus \bar{B}_2$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим, как и при доказательстве предыдущей теоремы, функцию $V(x) \in \boldsymbol{C}_2$, линейную при $|x| > r$ и такую, что

$$f'(x)\, V'(x) < 0 \text{ при } x \bar{\in} B_2.$$

Эта функция удовлетворяет условию (2.6) теоремы 2.2 (см. замечание 2.1), поскольку $|V'|$ ограничена, а интеграл $\int\limits_0^\infty a(t)\, c(t)\, dt$ конечен в силу (5.1). Кроме того, ограничена и функция $\sigma^2(t, x)\, V''(x)$. Поэтому согласно теореме 2.2 процесс $X^x(t)$ сходится п. н. при $t \to \infty$ к одной из точек множества B_2.

Доказываемое утверждение вытекает теперь из теоремы 3.1 при $F(x) = f'(x)$, $q(t, x) = \nabla_c f(x) - f'(x)$, $\alpha(t) = a(t)$, $\beta(t) = a(t)/c(t)$. (В проверке нуждается лишь соотношение

$$\int\limits_0^\infty \frac{a(t)\, q(t)}{\sqrt{\int\limits_t^\infty \frac{a^2(t)}{c^2(t)}\, du}}\, dt < \infty.$$

Однако оно вытекает из (5.1), так как в силу условий Липшица,

$$q(t) = \sup_{t \geqslant 0,\ |x-y|<\delta} |(f(x+c) - f(x-c))/(2c) - f'(x)| \leqslant$$
$$\leqslant k_{\delta, y}\, c(t) \text{ для любых } \delta > 0,\ y \in E_l.)$$

Приведем теперь аналогичные результаты для дискретных процедур. При этом для простоты формулировок будем предполагать, не оговаривая этого особо, что функции $R(x)$, $\mathsf{M}G^2(t, x, \omega)$ удовлетворяют локальным условиям Гельдера с некоторым показателем $\alpha > 0$ равномерно по $t = 1, 2, \ldots$, а величина $\mathsf{M}G^4(t, x, \omega)$ ограничена при всех $x \in E_1$, $t = 1, 2, \ldots$

Теорема 5.3. *Пусть*

$$\sup_{r_1<|x|<r_2} R(x)\,x < 0$$

при всех достаточно больших r_1, r_2, последовательность $a(t)$ удовлетворяет соотношениям (2.8), *ряд*

$$\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{a(t)}{\sqrt{\sum\limits_{i=t+1}^{\infty} a^2(i)}}\right)^3 \tag{5.2}$$

сходится и выполнено неравенство

$$|R(x)|^2 + \mathsf{M}G^2(t, x, \omega) \leqslant K(1 + x^2), \quad K = \mathrm{const}.$$

Тогда процесс $X^x(t)$, $x \in E_1$, определенный формулой (1.5), *сходится п.н. при $t \to \infty$ к одной из точек множества $B_1 \setminus \tilde{B}_1$.*

Как уже отмечалось выше, ряд (5.2) всегда сходится, если $a(t) \sim at^{-p}$, $a > 0$, $p > 0$.

Теорема 5.4. *Пусть*

$$\sup_{r_1<|x|<r_2} f'(x)\,x < 0$$

при всех достаточно больших r_1, r_2, функция $f'(x)$ удовлетворяет условию Липшица и выполнено неравенство

$$|f'(x)|^2 + \mathsf{M}G^2(t, x, \omega) \leqslant K(1 + x^2), \; K = \mathrm{const}.$$

Если, кроме того, для последовательностей $a(t)$, $c(t)$ справедливы соотношения (2.12) *и*

$$\sum_{t=0}^{\infty}\left[\frac{a(t)\,c(t)}{\sqrt{\psi(t)}} + \left(\frac{a(t)/c(t)}{\sqrt{\psi(t)}}\right)^3\right] < \infty, \tag{5.3}$$

где $\psi(t) = \sum\limits_{i=t+1}^{\infty} a^2(i)/c^2(i)$, то процесс $X^x(t)$, $x \in E_1$, определенный с помощью (1.6), *сходится п. н. при $t \to \infty$ к одной из точек множества $B_2 \setminus \tilde{B}_2$.*

З а м е ч а н и е 5.1. Если $a(t) \sim at^{-p}$, $c(t) \sim ct^{-q}$, где a, c, p, q — положительные постоянные, то условия (2.7), (5.1) или (2.12), (5.3) выполнены, если $p \leqslant 1$, $2q - 2p + 1 < 0$, $q > 1/4$.

ГЛАВА 6

АСИМПТОТИЧЕСКАЯ НОРМАЛЬНОСТЬ ПРОЦЕДУРЫ РОББИНСА — МОНРО

Доказаны в несколько более общих, чем обычно, условиях известные результаты Сакса [1] об асимптотической нормальности дискретной процедуры РМ. Аналогичные результаты получены и для непрерывной процедуры РМ. Кроме того, установлено, что при соответствующей нормировке и в соответствующем масштабе времени распределения процедуры РМ близки к распределениям некоторого гауссовского марковского стационарного процесса с непрерывным временем. Доказана и сходимость моментов нормированного процесса к соответствующим моментам нормального закона.

§ 1. Предварительные замечания

Введем сначала одно обозначение, которое будет неоднократно использовано в последующем изложении.

Пусть $X(t)$ — случайный процесс со значениями из E_l. Будем писать

$$X(t) \sim \mathfrak{N}(m, S),$$

если при $t \to \infty$ процесс $X(t)$ асимптотически нормален с параметрами (m, S), т. е. распределение вектора $X(t)$ слабо сходится к распределению гауссовского случайного вектора со средним m и ковариационной матрицей S.

Рассмотрим процесс стохастической аппроксимации РМ с непрерывным или дискретным временем, задаваемый соответственно дифференциальным уравнением (4.4.1) или рекуррентной формулой (4.1.9) [1]). Оказывается, что если $a(t) = a/t$, $a = \text{const} > 0$ и выполнены некоторые ограничения на $R(x)$, $\sigma_r(t, x)$ (или $G(t, x, \omega)$), то можно гарантировать асимптотическую нормальность величин $Y(t) = \sqrt{t}(X(t) - x_0)$, где x_0 — единственное решение уравнения $R(x) = 0$. Одно из таких ограничений состоит в следующем: функция $R(x)$ допускает представление

$$R(x) = B(x - x_0) + \delta(x), \qquad \delta(x) = o(|x - x_0|) \text{ при } x \to x_0, \tag{1.1}$$

где B — постоянная матрица.

В случае непрерывного времени для процесса $Y(t)$ получим с учетом (1.1) уравнение

$$dY(t) = \frac{A}{t} Y(t)\,dt + \frac{a}{\sqrt{t}}\left(\delta(X(t))\,dt + \sum_{r=1}^{k} \sigma_r(t, X(t))\,d\xi_r(t)\right), \tag{1.2}$$

где $A = aB + J/2$. (Здесь и ниже буквой J обозначается единичная матрица.) Поэтому, рассматривая (1.2) как линейное относительно $Y(t)$ неоднородное уравнение, будем иметь

$$Y(t) = e^{A\ln(t/s)}\sqrt{s}(\zeta - x_0) + a\int_s^t \frac{e^{A\ln(t/u)}}{\sqrt{u}}\left(\delta(X(u))\,du + \sum_{r=1}^{k} \sigma_r(u, X(u))\,d\xi_r(u)\right), \tag{1.3}$$

если $X(s) = \zeta$.

Для того чтобы получить аналог формулы (1.3) для дискретного времени, умножим обе части (4.1.9) на $\sqrt{t+1}$. Тогда из (1.1) и справедливого при $t \to \infty$

[1]) Всюду в данной главе при рассмотрении стохастического дифференциального уравнения (4.4.1) (рекуррентного соотношения (4.1.9)) предполагается, что выполнены условия (B) § 3.7 (условия (A) § 2.3). Эти условия не всегда будут оговариваться. Кроме того, в случае непрерывного времени постоянно предполагается, что для любой точки $x \in E_l$ и всех $t \geqslant 1$ существует единственное п. н. решение $X(t) = X^{1,x}(t)$ уравнения (4.4.1), отвечающее начальному условию $X(1) = x$.

соотношения

$$\sqrt{t+1}=\sqrt{t}\left(1+\frac{1}{2t}+O\left(\frac{1}{t^2}\right)\right)$$

найдем, что

$$Y(t+1)-Y(t)=\frac{A}{t}Y(t)+\frac{C(t)}{\sqrt{t}}(X(t)-x_0)+$$

$$+\frac{a\sqrt{t+1}}{t}(\delta(X(t))+G(t+1,\,X(t),\,\omega)),\quad (1.4)$$

где элементы матрицы $C(t)$ есть $O(^1/_t)$ при $t\to\infty$. Из (1.4), последовательно выражая $Y(k+1)$ через $Y(k)$, получим:

$$Y(t+1)=A_{s-1t}\sqrt{s}(\zeta-x_0)+\sum_{k=s}^{t}\frac{A_{kt}}{\sqrt{k}}\Big[C(k)(X(k)-x_0)+$$

$$+a\sqrt{1+\frac{1}{k}}(\delta(X(k))+G(k+1,\,X(k),\,\omega))\Big].\quad (1.5)$$

Здесь

$$A_{kt}=\begin{cases}\prod\limits_{m=k+1}^{t}\left(J+\dfrac{A}{m}\right), & s\leqslant k<t,\\ J & k=t.\end{cases}$$

Аналогия между формулами (1.3) и (1.5) становится ясной, если иметь в виду полезное для дальнейшего равенство

$$A_{kt}=(J+\Theta_{kt})\,e^{A\ln(t/k)},\qquad k=1,\,2,\,\ldots,\,t-1,\quad (1.6)$$

где $\|\Theta_{kt}\|\to 0$ при $k\to\infty$ равномерно по $t>k$ [1]). Здесь и ниже через $\|B\|=\sqrt{\sum\limits_{i,\,j=1}^{l}b_{ij}^2}$ мы обозначаем норму матрицы $B=((b_{ij}))$.

---

[1]) Для доказательства (1.6) достаточно разложить $\ln(J+A/m)$ по формуле Тейлора при всех достаточно больших m и воспользоваться тем, что частичные суммы гармонического ряда растут при $n\to\infty$ как $\ln n$.

Таким образом, изучение асимптотического поведения $Y(t)$ сводится к исследованию процессов

$$I_1(t)=\int_s^t \frac{e^{A\ln(t/u)}}{\sqrt{u}}\left[\Psi_0(u)\,du+\sum_{r=1}^k \Psi_r(u)\,d\xi_r(u)\right] \quad (1.7)$$

в случае непрерывного времени и процессов вида

$$I_2(t)=\sum_{u=s}^t \frac{A_{ut}}{\sqrt{u}}\varphi(u+1) \quad (1.8)$$

в случае дискретного времени, где $\Psi_r(u)$, $r=0, 1, \ldots$ $\ldots, k$, $\varphi(u)$ — $\mathscr{F}_u$ измеримы [1]).

Для исследования $I_2(t)$ нам также понадобится следующее утверждение об асимптотической нормальности суммы большого числа малых и слабо зависимых случайных величин. Пусть

$$\zeta(t)=\sum_{k=1}^t \xi_{tk},$$

где ξ_{tk}, $1\leqslant k\leqslant t$, $t=1, 2, \ldots,$ — последовательность серий случайных векторов из E_l. Обозначим

$$S_{tk}=\mathsf{M}\xi_{tk}\xi_{tk}^*, \quad R_{tk}=\mathsf{M}(\xi_{tk}\xi_{tk}^*\mid\xi_{t1}, \ldots, \xi_{tk-1}),$$

$$S_t=\sum_{k=1}^t S_{tk}, \quad \chi_{tk}^\varepsilon=\begin{cases}1, & \text{если } |\xi_{tk}|>\varepsilon,\\ 0, & \text{если } |\xi_{tk}|\leqslant\varepsilon.\end{cases}$$

Теорема 1.1. *Предположим, что выполнены условия*

$$\mathsf{M}(\xi_{tk}/\xi_{t1}, \ldots, \xi_{t-1})=0, \quad (1.9)$$

$$\sup_{t\geqslant 1}\sum_{k=1}^t \mathsf{M}|\xi_{tk}|^2<\infty, \qquad \lim_{t\to\infty} S_t=S, \quad (1.10)$$

$$\lim_{t\to\infty}\sum_{k=1}^t \mathsf{M}\|S_{tk}-R_{tk}\|=0 \quad (1.11)$$

и для любого $\varepsilon>0$

$$\lim_{t\to\infty}\sum_{k=1}^t \mathsf{M}|\xi_{tk}|^2\chi_{tk}^\varepsilon=0. \quad (1.12)$$

Тогда $\xi(t)\sim\mathfrak{N}(0, S)$.

[1]) σ-алгебры $\mathscr{F}_u$ для случая непрерывного времени введены на стр. 79, а для случая дискретного времени — на стр. 48.

Для доказательства этой теоремы нам понадобится следующая простая

Лемма 1.1. *Пусть ξ и η — случайные векторы из E_l,*

$$f(u) = \mathsf{M}e^{i(u, \xi)}, \quad g(u) = \mathsf{M}e^{i(u, \eta)}, \quad u \in E_l,$$

— соответствующие им характеристические функции, а $\chi_\xi(\varepsilon)$ ($\chi_\eta(\varepsilon)$) — случайная величина, равная 1 при $|\xi| > \varepsilon$ ($|\eta| > \varepsilon$) и нулю при $|\xi| \leqslant \varepsilon$ ($|\eta| \leqslant \varepsilon$). Предположим также, что ξ, η имеют конечные вторые моменты и

$$S_\xi = \mathsf{M}\xi\xi^*, \qquad S_\eta = \mathsf{M}\eta\eta^*$$

— их ковариационные матрицы. Тогда для любых $u \in E_l$, $\varepsilon < |u|^{-1}$ справедливо неравенство

$$|f(u) - g(u)| \leqslant |(u, \mathsf{M}(\xi - \eta))| + \\ + \frac{1}{2}u^2 \| S_\xi - S_\eta \| + \varepsilon |u|^3 [\mathsf{M}(|\xi|^2 + |\eta|^2)] + \\ + \frac{3}{2}|u|^2 \mathsf{M}[\chi_\xi(\varepsilon)|\xi|^2 + \chi_\eta(\varepsilon)|\eta|^2]. \quad (1.13)$$

Доказательство. Разлагая $\exp\{i(u, x)\}$ по формуле Тейлора до четвертого члена в области $|x| \leqslant \varepsilon$ и до третьего члена в области $|x| > \varepsilon$, получим при некоторых $\theta_1(x, u)$, $\theta_2(x, u)$, $|\theta_i(x, u)| \leqslant 1$, соотношение

$$|f(u) - g(u)| \leqslant |\mathsf{M}(u, \xi - \eta)| + \\ + \frac{1}{2}|\mathsf{M}(u, \xi)^2(1 - \chi_\xi(\varepsilon)) - \mathsf{M}(u, \eta)^2(1 - \chi_\eta(\varepsilon))| + \\ + |\mathsf{M}[\theta_1(\xi, u)(u, \xi)^3(1 - \chi_\xi(\varepsilon)) - \theta_1(\eta, u)(u, \eta)^3(1 - \chi_\eta(\varepsilon))]| + \\ + |\mathsf{M}[\theta_2(\xi, u)(u, \xi)^2\chi_\xi(\varepsilon) - \theta_2(\eta, u)(u, \eta)^2\chi_\eta(\varepsilon)]| \leqslant \\ \leqslant |\mathsf{M}(u, \xi - \eta)| + \frac{1}{2}|\mathsf{M}[(u, \xi)^2 - (u, \eta)^2]| + \\ + \frac{3}{2}\mathsf{M}[(u, \xi)^2\chi_\xi(\varepsilon) + (u, \eta)^2\chi_\eta(\varepsilon)] + \\ + \mathsf{M}[|(u, \xi)|^3(1 - \chi_\xi(\varepsilon)) + |(u, \eta)|^3(1 - \chi_\eta(\varepsilon))].$$

Так как $|(u, x)| < \varepsilon |u|$ при $|x| < \varepsilon$, то последнее математическое ожидание мажорируется величиной

$$\varepsilon |u| \mathsf{M}[(u, \xi)^2 + (u, \eta)^2].$$

Отсюда и из того факта, что $\mathsf{M}(u, \xi)^2 = (S_\xi u, u)$, $\mathsf{M}(u, \eta)^2 = (S_\eta u, u)$, вытекает утверждение леммы.

Доказательство теоремы 1.1. Обозначим η_{tk}, $k = 1, \ldots, t$, независимые между собой и от ξ_{tk} гауссовские случайные векторы с нулевым средним и ковариационными матрицами S_{tk}. Пусть, кроме того,

$$f_t(u) = \mathsf{M} e^{i\left(u, \sum\limits_{k=1}^{t} \xi_{tk}\right)}, \qquad g_t(u) = \mathsf{M} e^{i\left(u, \sum\limits_{k=1}^{t} \eta_{tk}\right)},$$

$$f_{tk}(u) = \mathsf{M} e^{i(u, \xi_{tk})}, \qquad g_{tk}(u) = \mathsf{M} e^{i(u, \eta_{tk})}.$$

В силу теоремы о непрерывном соответствии между функциями распределения и характеристическими функциями достаточно доказать для фиксированного u справедливость соотношения

$$\lim_{t\to\infty} [f_t(u) - g_t(u)] = 0. \tag{1.14}$$

Для доказательства (1.14) запишем сначала очевидное тождество

$$e^{i\left(u, \sum\limits_{k=1}^{t} \xi_{kt}\right)} - e^{i\left(u, \sum\limits_{k=1}^{t} \eta_{tk}\right)} \equiv$$

$$\equiv \sum_{k=1}^{t} \left[e^{i(u, \xi_{tk})} - e^{i(u, \eta_{tk})}\right] e^{i(u, \zeta_{tk})}, \tag{1.15}$$

в котором

$$\zeta_{tk} = \sum_{j=1}^{k-1} \xi_{tj} + \sum_{j=k+1}^{t} \eta_{tj}, \qquad k = 2, \ldots, t-1,$$

$$\zeta_{t1} = \sum_{j=2}^{t} \eta_{tj}, \quad \zeta_{tt} = \sum_{j=1}^{t-1} \xi_{tj}.$$

Из (1.15), полагая

$$\bar{f}_{tk} = \mathsf{M}\left(e^{i(u, \xi_{tk})} / \xi_{t1}, \ldots, \xi_{tk-1}\right),$$

имеем

$$|f_t(u)-g_t(u)|=$$

$$=|\mathsf{M}\sum_{k=1}^{t}\mathsf{M}([e^{i(u,\,\xi_{tk})}-e^{i(u,\,\eta_{tk})}]\,e^{i(u,\,\zeta_{tk})}/\xi_{t1},\,\ldots,\,\xi_{tk-1})|=$$

$$=|\mathsf{M}\sum_{k=1}^{t}\{\widetilde{f}_{tk}(u)\,e^{i(u,\,\sum_{j=1}^{k-1}\xi_{tj})}\,\mathsf{M}e^{i(u,\,\sum_{j=k+1}^{t}\eta_{tj})}-$$

$$-g_{tk}(u)\;e^{i(u,\,\sum_{j=1}^{k-1}\xi_{tj})}\,\mathsf{M}e^{i(u,\,\sum_{j=k+1}^{t}\eta_{tj})}\}|\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{k=1}^{t}\mathsf{M}|\widetilde{f}_{tk}(u)-g_{tk}(u)|. \qquad (1.16)$$

Применим теперь лемму 1.1 для оценки разности $|\widetilde{f}_{tk}(u)-g_{tk}(u)|$. Учитывая условие (1.9), находим

$$|\widetilde{f}_{tk}(u)-g_{tk}(u)|\leqslant\frac{1}{2}u^2\,\|S_{tk}-R_{tk}\|+$$

$$+\varepsilon|u|^3[\mathsf{M}|\xi_{tk}|^2+\mathsf{M}(|\xi_{tk}|^2/\xi_{t1},\,\ldots,\,\xi_{tk-1})]+$$

$$+\frac{3}{2}|u|^2[\mathsf{M}|\eta_{tk}|^2\chi_{\eta_{tk}}(\varepsilon)+\mathsf{M}(|\xi_{tk}|^2\chi_{tk}^{\varepsilon}/\xi_{t1},\,\ldots,\,\xi_{tk-1})]. \quad 1.17)$$

В силу неравенств (1.16), (1.17), а также условий (1.10) — (1.12) для доказательства теоремы достаточно убедиться в справедливости соотношения

$$\sum_{k=1}^{t}\mathsf{M}|\eta_{tk}|^2\chi_{\eta_{tk}}(\varepsilon)\to 0\quad\text{при}\quad t\to\infty. \qquad (1.18)$$

Чтобы установить (1.18), заметим прежде всего, что

$$\sup_{1\leqslant k\leqslant t}\|S_{tk}\|\leqslant l^2\sup_{1\leqslant k\leqslant t}\mathsf{M}|\xi_{tk}|^2\leqslant l^2\{\varepsilon^2+\sup_{1\leqslant k\leqslant t}\mathsf{M}|\xi_{tk}|^2\chi_{tk}^{\varepsilon}\}.$$

Отсюда и из (1.12) вытекает равенство

$$\lim_{t\to\infty}\sup_{1\leqslant k\leqslant t}\|S_{tk}\|=0.$$

Далее имеем

$$\sum_{k=1}^{t} \mathsf{M}\{|\eta_{tk}|^2 \chi_{\eta_{tk}}(\varepsilon)\} \leqslant \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{k=1}^{t} \mathsf{M}|\eta_{tk}|^4 \leqslant$$

$$\leqslant \frac{3l}{\varepsilon^2} \sum_{k=1}^{t} \|S_{tk}\|^2 \leqslant \frac{3l}{\varepsilon^2} \sum_{k=1}^{t} \|S_{tk}\| \sup_{1\leqslant k\leqslant t} \|S_{tk}\| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{3l^3}{\varepsilon^2} \sum_{k=1}^{t} \mathsf{M}|\xi_{tk}|^2 \sup_{1\leqslant k\leqslant t} \|S_{tk}\| \to 0 \quad \text{при} \quad t\to\infty.$$

Тем самым (1.18), а значит, и утверждение теоремы доказано.

В следующих параграфах будет исследоваться асимптотическое поведение процессов $Y(t)$, определяемых формулами (1.3), (1.5). При этом сначала, в § 2, при некоторых дополнительных ограничениях (условия 1,2,2′) будет получена формула

$$\mathsf{M}|X(t)-x_0|^2 = O\left(\frac{1}{t}\right).$$

Далее, в §§ 3,4, мы покажем, что в правых частях выражений (1.3), (1.5) все суммы кроме последних близки к нулю в том или ином вероятностном смысле. Точнее, мы докажем, что в том или ином вероятностном смысле справедливо соотношение

$$Y(t) \sim a \int_s^t \frac{e^{A\ln(t/u)}}{\sqrt{u}} \sum_{r=1}^{k} \sigma_r(u, X(u))\, d\xi_r(u) \tag{1.19}$$

для случая непрерывного времени и соотношение

$$Y(t) \sim a \sum_{k=s}^{t} \frac{A_{kt}}{\sqrt{k}} G(k+1, X(k), \omega) \tag{1.20}$$

для случая дискретного времени.

Затем, в §§ 5, 6 будет доказана асимптотическая нормальность (и установлены более точные свойства) процессов в правых частях формул (1.19), (1.20) (для исследования последнего процесса и будет применена теорема 1.1).

Наконец, в § 7, изучается асимптотическое поведение моментов процесса $Y(t)$ как в случае дискретного, так и непрерывного времени.

§ 2. Асимптотическое поведение решений

В этом параграфе будут приведены условия, гарантирующие достаточно быструю сходимость к точке x_0 процесса с. а., определяемого либо уравнением

$$dX(t)=\frac{a}{t}\left(R(X(t))\,dt+\sum_{r=1}^{k}\sigma_r(t, X(t))\,d\xi_r(t)\right), \qquad X(s)=\zeta, \tag{2.1}$$

либо рекуррентной формулой

$$X(t+1)-X(t)=\frac{a}{t}\left(R(X(t))+G(t+1, X(t), \omega)\right), \quad X(s)=\zeta. \tag{2.2}$$

Как обычно (см. § 3.3 и § 2.3), мы считаем, что винеровские процессы $\xi_r(t)$ (семейство случайных величин $G(t, x, \omega)$, $x\in E_l$) измеримы относительно монотонной системы σ-алгебр $\mathscr{F}_t$ и приращения $\xi_r(t+h)-\xi_r(t)$ не зависят от $\mathscr{F}_t$ ($G(t+1, x, \omega)$ не зависит от $\mathscr{F}_t$). Мы считаем также случайную величину ζ $\mathscr{F}_s$-измеримой.

Будем предполагать, что выполнены следующие ограничения.

Условие 1. Существует симметричная положительно определенная матрица[1]) C и $\lambda>0$ такие, что при всех $x\in E_l$

$$(CR(x),\ x-x_0)\leqslant-\lambda(C(x-x_0),\ (x-x_0)),$$
$$2a\lambda>1.$$

Условие 2. Для всех $t\geqslant 1$, $x\in E_l$

$$|R(x)|+\sum_{r=1}^{k}|\sigma_r(t, x)|\leqslant K(1+|x|), \quad K=\text{const}.$$

В случае дискретного времени последнее условие будет заменено на

Условие 2′. Для всех $t=1, 2, \ldots$, $x\in E_l$

$$|R(x)|^2+\mathsf{M}\,|G(t, x, \omega)|^2<K(1+|x|^2).$$

Заметим, что при выполнении условий 1, 2 и условий (B) § 3.7 решение $X^{s,\zeta}(t)$ задачи (2.1) существует для всех $t\geqslant s$, если ζ $\mathscr{F}_s$-измерима.

[1]) По поводу этого условия см. следствие 3.1 на стр. 173.

Лемма 2.1. Пусть выполнены условия 1, 2, *а* $X^{s,\zeta}(t)$ — *решение задачи* (2.1), *где* ζ $\mathscr{F}_s$-*измерима*, $\mathsf{M}\,|\,\zeta\,|^2<\infty$. *Тогда*

$$\mathsf{M}\,|\,X^{s,\zeta}(t)-x_0\,|^2=O\,(1/t),\quad t\to\infty, \tag{2.3}$$

и, кроме того, для любого положительного $\gamma<1$

$$\lim_{t\to\infty}\ t^{\gamma}\,|\,X^{s,\zeta}(t)-x_0\,|^2=0\ (\text{п. н.}). \tag{2.4}$$

Соотношения (2.3), (2.4) *остаются в силе и для процесса* $X^{s,\zeta}(t)$, *определяемого формулами* (2.2), *если условие* 2 *заменено на условие* $2'$.

Доказательство. Не ограничивая общности, можно считать $x_0=0$.

1) Пусть сначала $X^{s,\zeta}(t)$ — непрерывный процесс стохастической аппроксимации, а L — его производящий дифференциальный оператор. Положим

$$V_1(x)=(Cx,\ x).$$

Тогда

$$LV_1=\frac{2a}{t}(CR(x),\ x)+a^2\sum_{r=1}^{k}\frac{(C\sigma_r,\ \sigma_r)}{t^2}\leqslant$$
$$\leqslant-\frac{p}{t}V_1(x)+\frac{k_1\,(1+V_1)}{t^2},\qquad p=2a\lambda>1.$$

(Здесь и ниже k_i — положительные постоянные.) Отсюда вытекает, что найдутся такие $p_1>1$ и T, для которых

$$LV_1\leqslant\frac{-p_1}{t}V_1+\frac{k_1}{t^2}\quad\text{при}\quad t\geqslant T \tag{2.5}$$

и, значит, согласно справедливой в рассматриваемых условиях формуле (3.5.5) (см. задачу 3.7.1),

$$\frac{d}{dt}\mathsf{M}V_1(X^{s,\zeta}(t))=\mathsf{M}LV_1(X^{s,\zeta}(t))\leqslant$$
$$\leqslant-\frac{p_1}{t}\,\mathsf{M}V_1(X^{s,\zeta}(t))+\frac{k_1}{t^2},\qquad t\geqslant T.$$

Из этих соотношений получаем

$$\frac{d}{dt}\,[t^{p_1}\mathsf{M}V_1(X^{s,\zeta}(t))]\leqslant k_1t^{p_1-2},\qquad t\geqslant T.$$

Поэтому

$$\mathsf{M}V_1(X^{s,\zeta}(t)) \leqslant \left(\frac{T}{t}\right)^{p_1} \mathsf{M}V_1(X^{s,\zeta}(T)) + \frac{k_2}{t}. \qquad (2.6)$$

Из (2.6) в силу положительной определенности матрицы C и неравенства $p_1 > 1$ следует (2.3).

Для доказательства (2.4) рассмотрим вспомогательную функцию

$$V_2(t, x) = t^{\gamma} V_1(x) + t^{-\varepsilon},$$

где $0 < \gamma < 1$, $\varepsilon < 1 - \gamma$. Тогда, учитывая (2.5), имеем при $t > T$

$$LV_2(t, x) = t^{\gamma} LV_1(x) + \gamma t^{\gamma-1} V_1(x) - \varepsilon t^{-\varepsilon-1} \leqslant$$
$$\leqslant (\gamma - p) t^{\gamma-1} V_1(x) + k_1 t^{\gamma-2} - \varepsilon t^{-\varepsilon-1} \leqslant 0 \qquad (2.7)$$

при всех достаточно больших $t \geqslant T_1$. Значит, $(V_2(t, X^{s,\zeta}(t)), \mathscr{F}_t, t \geqslant T_1)$ — супермартингал (см. следствие 3.8.1). Из теоремы 3.6.1 вытекает существование конечного предела

$$\lim_{t\to\infty} t^{\gamma} V_1(x),$$

а, следовательно, и соотношение (2.4).

2) Пусть теперь $X^{s,\zeta}(t)$ — процесс, определяемый формулами (2.2), а L — его производящий оператор. Тогда, как и выше, считая $x_0 = 0$, будем иметь

$$LV_1(x) = \mathsf{M}\left(C\left(x + \frac{a(R(x) + G(t+1, x, \omega))}{t}\right),\right.$$
$$\left. x + \frac{a(R(x) + G(t+1, x, \omega))}{t}\right) - (Cx, x) \leqslant$$
$$\leqslant \frac{2a(C(R(x), x)}{t} + \frac{a^2 \|C\| (|R(x)|^2 + \mathsf{M}|G(t+1, x, \omega)|^2)}{t^2} \leqslant$$
$$\leqslant -\frac{pV_1(x)}{t} + \frac{k_3(1 + V_1(x))}{t^2}.$$

Значит, для некоторых $p_1 > 1$ и T

$$LV_1(x) \leqslant -\frac{p_1 V_1(x)}{t} + \frac{k_3}{t^2} \quad \text{при} \quad t > T.$$

Поэтому, согласно лемме 2.3.1,

$$\mathsf{M}V_1(X^{s,\zeta}(t+1)) - \mathsf{M}V_1(X^{s,\zeta}(t)) \leqslant$$
$$\leqslant -\frac{p_1}{t}\mathsf{M}V_1(X^{s,\zeta}(t)) + \frac{k_3}{t^2}. \qquad (2.8)$$

Из (2.8) получаем с помощью итераций неравенство

$$\mathsf{M}V_1(X^{s,\zeta}(t+1)) \leqslant$$
$$\leqslant \mathsf{M}V(X^{s,\zeta}(T)) \prod_{m=T}^{t}\left(1-\frac{p_1}{m}\right) + k_3 \sum_{k=T}^{t} \frac{1}{k^2} \prod_{m=k+1}^{t}\left(1-\frac{p_1}{m}\right).$$

Отсюда и из хорошо известных оценок

$$\prod_{m=1}^{t}\left(1-\frac{p_1}{m}\right) \leqslant \frac{k_4}{t^{p_1}},$$
$$\prod_{m=k+1}^{t}\left(1-\frac{p_1}{m}\right) \leqslant k_4\left(\frac{k}{t}\right)^{p_1}, \quad k=1, \ldots, t-1,$$
$$\sum_{k=T}^{t}\left(\frac{k}{t}\right)^{p_1}\frac{1}{k^2} \leqslant \frac{k_5}{t}$$

вытекает, что

$$\mathsf{M}V_1(X^{s,\zeta}(t+1)) < O(t^{-p}) + O(t^{-1}). \qquad (2.9)$$

Соотношение (2.3) является теперь следствием положительной определенности матрицы C. Доказательство равенства (2.4) проводится точно так же, как и в случае непрерывного времени, с той лишь разницей, что теперь вместо следствия 3.8.1 и теоремы 3.6.1 нужно воспользоваться теоремами 2.2.2, 1.5.1.

§ 3. Исследование процесса $I_1(t)$

В гл. 3 было введено понятие стохастического интеграла и затем построено стохастическое дифференциальное уравнение Ито, определяющее марковский случайный процесс. Однако с помощью стохастического интеграла можно построить более широкий класс случайных процессов. Так, при доказательстве следующей леммы нам придется рассматривать в E_l уравнение вида

$$dY(t)=F(t, Y(t), \omega)\,dt+\sum_{r=1}^{k}\Psi_r(t, \omega)\,d\xi_r(t),$$

где $F(t, y, \omega)$ при фиксированном y и $\Psi_r(t, \omega)$ $\mathscr{F}_t$-измеримы. Под решением этого уравнения, удовлетворяющего начальному условию $X(s)=\zeta$, ζ — $\mathscr{F}_s$-измеримая случайная величина, будет пониматься, как обычно, решение интегрального уравнения

$$Y(t)=\zeta+\int_s^t F(u, Y(u), \omega)\,du+\sum_{r=1}^{k}\int_s^t \Psi_r(u, \omega)\,d\xi_r(u). \quad (3.1)$$

При некоторых ограничениях, которые в дальнейшем предполагаются выполненными, это уравнение имеет п. н. непрерывное $\mathscr{F}_t$-измеримое решение $Y(t)$.

С уравнением (3.1) естественно связать оператор

$$L=\frac{\partial}{\partial t}+\left(F(t, y, \omega), \frac{\partial}{\partial y}\right)+\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{k}\left(\Psi_r(t, \omega), \frac{\partial}{\partial y}\right)^2. \quad (3.2)$$

В случае, когда $F(t, y, \omega)$ не зависит от ω, $Y(t)$ — марковский случайный процесс, а L — его производящий оператор. Для уяснения роли оператора L в общем случае полезно решить следующую задачу.

Задача 3.1. Пусть $V(t, y)\in C_2$, $LV(t, y)\leqslant 0$ п. н. при $t\geqslant s$ $(s\geqslant 1)$, $x\in E_l$, и, кроме того, математические ожидания

$$\mathsf{M}\,|V(s, Y(s))|<\infty, \quad \mathsf{M}\,(|LV(t, Y(t))|/\mathscr{F}_s),$$
$$\mathsf{M}\left(\left|\frac{\partial}{\partial y}V(t, Y(t))\right|^2|\Psi_r(t, \omega)|^2/\mathscr{F}_s\right)$$

ограничены по $t\geqslant s$ на каждом конечном интервале. Доказать, что тогда $(V(t, Y(t)), \mathscr{F}_t, t\geqslant s)$ — супермартингал.

Введем следующее обозначение для произвольного $y\in E_1$:

$$(y)_N=\operatorname{sign} y\,\min\{|y|, N\}.$$

Если y — вектор из E_l с координатами $y_1, \ldots, y_l$, то под $(y)_N$ будем понимать вектор $((y_1)_N, \ldots, (y_l)_N)$.

Будем также говорить, что матрица A *устойчива*, если все ее собственные числа имеют отрицательные действительные части.

В теории устойчивости движения (см., например, Малкин [1]) хорошо известен следующий факт, принадлежащий А. М. Ляпунову.

Лемма Ляпунова. *Если A устойчива, то для любой симметричной положительно определенной матрицы D найдется такая симметричная положительно определенная матрица C, что*

$$CA + A^*C = -D.$$

Из этого утверждения вытекает нужное для дальнейшего

Следствие 3.1. Если A — устойчивая матрица с собственными числами $\lambda_1, \ldots, \lambda_l$, $\bar{\lambda} = \min\limits_{1 \leq i \leq l} |\operatorname{Re} \lambda_i|$, то для любого $\lambda_0 < \bar{\lambda}$ найдется симметричная положительно определенная матрица C, для которой

$$(CAx, x) < -\lambda_0 (Cx, x).$$

Для доказательства достаточно заметить, что матрица $A + \lambda_0 J$ устойчива, и воспользоваться леммой Ляпунова.

Лемма 3.1. *Пусть A — устойчивая матрица, $\Psi_r(u) = \Psi_r(u, \omega)$, $r = 0, 1, \ldots, k$, $u \geq s$, $\mathscr{F}_u$ — измеримые случайные процессы со значениями в E_l, причем для некоторого $\delta > 0$*

$$\lim_{t\to\infty} |\Psi_0(t)|\, t^{1/2+\delta} = 0 \quad (\text{п. н.}), \tag{3.3}$$

$$\lim_{t\to\infty} |\Psi_r(t)|^2\, t^{\delta} = 0, \quad r = 1, \ldots, k \quad (\text{п. н.}). \tag{3.4}$$

Пусть, кроме того, функции $\Psi_r(u)$ п. н. непрерывны. Тогда процесс $I_1(t)$, определенный формулой (1.7), *стремится к нулю с вероятностью* 1 *при $t \to \infty$.*

Доказательство. Рассмотрим процесс $Y^y(t)$, удовлетворяющий уравнению

$$dY(t) = \left(\frac{A}{t} Y(t) + \frac{\Psi_0(t)}{\sqrt{t}}\right) dt + \sum_{r=1}^{k} \frac{\Psi_r(t)}{\sqrt{t}} d\xi_r(t) \tag{3.5}$$

при начальном условии $Y^y(1) = y$. Очевидно. $I_1(t) = Y^0(t)$ и, значит, достаточно установить равенство

$$\lim_{t\to\infty} Y^0(t) = 0 \quad (\text{п. н.}).$$

С этой целью, наряду с (3.5), введем процесс $\hat{Y}^y(t)$, являющийся решением задачи

$$d\hat{Y}(t) = \left(\frac{A}{t}\hat{Y}(t) + \frac{(\Psi_0(t)\,t^{1/2+\delta})_N}{t^{1+\delta}}\right)dt + \sum_{r=1}^{k} \frac{(\Psi_r(t)\,t^{\delta/2})_N}{t^{1/2+\delta/2}}\,d\xi_r(t), \qquad \hat{Y}(1) = y. \quad (3.6)$$

В силу условий (3.3), (3.4), для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое достаточно большое N, что с вероятностью, большей

$$1-\varepsilon, \quad \frac{(\Psi_0(t)\,t^{1/2+\delta})_N}{t^{1+\delta}} = \frac{\Psi_0(t)}{\sqrt{t}}, \quad \frac{(\Psi_r(t)\,t^{\delta/2})_N}{t^{1/2+\delta/2}} = \frac{\Psi_r(t)}{\sqrt{t}}$$

при всех $t \geqslant 1$, $r = 1, \ldots, k$. Значит, начиная с некоторого N,

$$\mathsf{P}\{\sup_{t\geqslant 1} |Y^y(t) - \hat{Y}^y(t)| = 0\} > 1-\varepsilon. \quad (3.7)$$

Если теперь удастся доказать для любого $N > 0$ соотношение $\hat{Y}(y) \to 0$ при $t\to\infty$ н. п., то из (3.7) немедленно получим, что

$$\mathsf{P}\{\lim_{t\to\infty} Y^y(t) = 0\} > 1-\varepsilon.$$

В силу произвольности ε отсюда будет вытекать утверждение леммы. Итак, достаточно убедиться в справедливости доказываемого утверждения для процесса $\hat{Y}^y(t)$. Для этого рассмотрим вспомогательную функцию

$$W(t, y) = t^{\varkappa}(Cy, y) + kt^{\varkappa-\delta}.$$

Здесь $\varkappa$ и k — постоянные, удовлетворяющие неравенствам $0 < \varkappa < \delta$, $k > 0$, а C — симметричная положительно определенная матрица, для которой

$$AC + CA^* = -J \quad (3.8)$$

(J — единичная $l \times l$-матрица). Такая матрица C обязательно существует в силу устойчивости A (см. лемму Ляпунова).

Если обозначить $\tilde{L}$ оператор (3.2) процесса $\tilde{Y}^y(t)$, то простые выкладки приведут, с учетом (3.8) и неравенства $2ab \leqslant a^2 + b^2$, к соотношениям

$$\tilde{L}W(t, y) = t^{\varkappa-1}((AC + CA^*)y, y) + \\ + 2t^{\varkappa-1-\delta}((\Psi_0(t)t^{1/2+\delta})_N, Cy) + \\ + t^{\varkappa-1-\delta}\sum_{r=1}^{k}(C(\Psi_r(t)t^{\delta/2})_N, (\Psi_r(t)t^{\delta/2})_N) + \\ + \varkappa t^{\varkappa-1}(Cy, y) + k(\varkappa-\delta)t^{\varkappa-\delta-1} \leqslant \\ \leqslant t^{\varkappa-1}((-J + \varkappa C)y, y) + t^{\varkappa-1-\delta}[-k(\delta-\varkappa) + k_1] + \\ + k_2 t^{\varkappa-1-\delta}[1 + (y, y)]. \quad (3.9)$$

Здесь k_1, k_2 — постоянные, зависящие от l, N и элементов матрицы C. Из (3.9) вытекает, что $\tilde{L}W(t, y) \leqslant 0$ при всех достаточно больших $t \geqslant T$ и $y \in E_l$, если $\varkappa$ выбрано достаточно малым, а k — достаточно большим. Так как, далее, (3.6) — линейная система, все коэффициенты которой ограничены, то при всех $t \geqslant s$ существуют ограниченные на каждом конечном интервале изменения t моменты

$$\mathsf{M}(|\tilde{Y}^y(t)|^2/\mathscr{F}_s).$$

Поэтому (см. задачу 3.1) процесс $(W(t, \tilde{Y}^y(t)), \mathscr{F}_t, t \geqslant T)$ — супермартингал. В силу теоремы 3.6.1 существует с вероятностью 1 конечный предел

$$\lim_{t\to\infty} W(t, \tilde{Y}^y(t)) = \lim_{t\to\infty} t^{\varkappa}(C\tilde{Y}^y(t), \tilde{Y}^y(t)) < \infty.$$

Последнее соотношение в силу положительной определенности матрицы C гарантирует сходимость к нулю п. н. процесса $\tilde{Y}^y(t)$ при любом y, а значит, как отмечалось выше, и процесса $I_1(t)$.

Лемма 3.2. *Пусть выполнены условия 1, 2 § 2, A — устойчивая матрица, $\Psi_r(u) \equiv 0$, $\Psi_0(u) = \delta(X^{s,\zeta}(u))$, где ζ $\mathscr{F}_s$-измерима, $\mathsf{M}|\zeta|^2 < \infty$, а $|\delta(x)| = o(|x - x_0|^{1+\mu})$ при $|x - x_0| \to 0$. Тогда $I_1(t)$ стремится при $t \to \infty$ к нулю* *по вероятности, если* $\mu = 0$ *и с вероятностью* 1, *если* $\mu > 0$.

Доказательство. Будем считать $x_0 = 0$.

1) Пусть $|\delta(x)| = o(|x|)$, $|x| \to 0$ и ε — произвольное положительное число. Тогда найдется такое $\theta > 0$, что

$$|\delta(x)| \leqslant \varepsilon^2 |x| \text{ при } |x| < \theta. \tag{3.10}$$

Выберем, далее, T из условия

$$\mathsf{P}\{\sup_{u \geqslant T} |X^{s,\zeta}(u)| < \theta\} > 1 - \varepsilon \tag{3.11}$$

(такое T найдется в силу леммы 2.1).

Так как матрица A устойчива, то

$$\| e^{At} \| \leqslant k e^{-\lambda_1 t} \tag{3.12}$$

для некоторых $k > 0$, $\lambda_1 > 0$.

Из (3.10), (3.11), (3.12), неравенства Чебышева и (2.3) имеем

$$\mathsf{P}\left\{\left|\int_T^t \frac{e^{A\ln(t/u)}}{\sqrt{u}} \delta(X^{s,\zeta}(u))\,du\right| > \varepsilon\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon + \mathsf{P}\left\{\left|\int_T^t \frac{e^{A\ln(t/u)}}{\sqrt{u}} \delta(X^{s,\zeta}(u))\,du\right| > \varepsilon,\ \sup_{t \geqslant T}|X^{s,\zeta}(t)| < \theta\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon + \mathsf{P}\left\{\int_T^t \frac{\|e^{A\ln(t/u)}\|}{\sqrt{u}} |\delta(X^{s,\zeta}(u))|\,du > \varepsilon,\ \sup_{t \geqslant T}|X^{s,\zeta}(t)| < \theta\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon + \mathsf{P}\left\{\int_T^t \frac{\|e^{A\ln(t/u)}\|}{\sqrt{u}} |X^{s,\zeta}(u)|\,du > 1/\varepsilon\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon + \varepsilon \int_T^t \frac{\|e^{A\ln(t/u)}\|}{\sqrt{u}} \mathsf{M}|X^{s,\zeta}(u)|\,du \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon + k\varepsilon \int_T^t \left(\frac{u}{t}\right)^{\lambda_1} \frac{\mathsf{M}|X^{s,\zeta}(u)|\sqrt{u}}{u}\,du \leqslant \varepsilon + k_1\varepsilon.$$

Кроме того, в силу (3.12)

$$\lim_{t\to\infty}\int_s^T \frac{e^{A\ln(t/u)}}{\sqrt{u}}\,\delta(X^{s,\zeta}(u))\,du = 0 \quad \text{(п. н.)}.$$

Тем самым, первое утверждение леммы доказано.

2) Пусть теперь $|\delta(x)| = o(|x|^{1+\mu})$ при $|x| \to 0$, причем $\mu > 0$. Тогда для некоторых $\theta > 0$, $k_2 > 0$

$$|\delta(x)| < k_2 |x|^{1+\mu} \text{ при } |x| < \theta.$$

Выберем $\gamma < 1$ так, что

$$\delta = \frac{\gamma(1+\mu)-1}{2} > 0.$$

В силу леммы 2.1,

$$|X^{s,\zeta}(t)| \leqslant C_1(\omega)\, t^{-\gamma/2} \quad \text{(п. н.)}$$

для некоторой случайной величины $C_1(\omega)$. Поэтому при $0 < \delta_1 < \delta$

$$u^{1/2+\delta_1}|\delta(X^{s,\zeta}(u))| \leqslant C_2(\omega)\, u^{-\frac{\gamma(1+\mu)}{2}+\frac{1}{2}+\delta_1} \to 0 \qquad \text{(п. н.)}$$

при $u \to \infty$ и наше утверждение вытекает из леммы 3.1 при $\Psi_0(t) = \delta(X^{s,\zeta}(t))$, $\Psi_r(u) = 0$, $r = 1, \ldots, k$.

Лемма 3.3. *Пусть выполнены условия* 1, 2 § 2, A — *устойчивая матрица,* $\Psi_0(u) \equiv 0$, $\Psi_r(u) = \Psi_r(u, X^{s,\zeta}(u))$, $r = 1, \ldots, k$, *причем*

$$|\Psi_r(u, x)| \leqslant K|x - x_0|^{\nu}, \quad \nu > 0 \tag{3.13}$$

в некоторой окрестности точки $x = x_0$. *Тогда*

$$I_1(t) \to 0 \text{ п. н. при } t \to \infty.$$

Доказательство. Можно считать $x_0 = 0$. Из леммы 2.1 и (3.13) вытекает, что при $u \to \infty$

$$u^{\nu\gamma}|\Psi_r(u, X^{s,\zeta}(u))| \to 0 \quad \text{(п. н.)},$$

если $0 < \gamma < {}^1/_2$. Поэтому доказываемое утверждение является прямым следствием леммы 3.1.

§ 4. Исследование процесса $I_2(t)$

При исследовании величин $I_2(t)$, $t = 1, 2, \ldots$ нам будет удобно рассматривать процесс $Y(t) = Y^{s, \zeta}(t)$, описываемый более общим, чем (2.3.4), соотношением

$$Y(t+1) - Y(t) = f(t+1, Y(t), \omega) \qquad (4.1)$$

при $t > s$, $Y(s) = \zeta$, где ζ $\mathscr{F}_s$-измерима, а функция $f(t, y, \omega)$ удовлетворяет лишь условиям A.1, A.2 § 2.3 и $\mathscr{F}_t$-измерима при каждом y. Как и в случае марковских процессов, естественно связать с (4.1) оператор L, действующий на функцию $V(t, y)$ по формуле

$$\begin{aligned} LV(t, y) &= \\ &= \mathsf{M}(V(t+1, Y^{t,y}(t+1))/\mathscr{F}_t) - V(t, y) = \\ &= \mathsf{M}(V(t+1, y + f(t+1, y, \omega))/\mathscr{F}_t) - V(t, y). \qquad (4.2) \end{aligned}$$

Оператор L является обобщением производящего оператора (2.1.7) марковского процесса. Его дальнейшее применение основано на следующем утверждении, вытекающем из свойств условных математических ожиданий.

З а д а ч а 4.1. Пусть функция $V(t, y) \geqslant 0$ удовлетворяет условиям

$$\mathsf{M}V(s, \zeta) < \infty; \quad LV(t, y) \leqslant 0 \text{ п. н. при } t \geqslant s,\ y \in E_l.$$

Доказать, что тогда $(V(t, Y^{s,\zeta}(t)), \mathscr{F}_t, t \geqslant s)$ — супермартингал.

Нам будет также полезна следующая простая

Лемма 4.1. *Пусть A — устойчивая матрица,*

$$A_{kt} = \begin{cases} \prod\limits_{m=k+1}^{t} (J + A/m), & k = 1, \ldots, t-1, \\ J, & k = t, \end{cases}$$

а последовательность положительных чисел $m_{k,t}$ такова, что

$$\lim_{k\to\infty} m_{kt} = 0 \text{ *равномерно по* } t. \qquad (4.3)$$

Тогда

$$\lim_{t\to\infty} \sum_{k=1}^{t} \frac{\|A_{kt}\|^2}{k} m_{kt} = 0. \qquad (4.4)$$

Доказательство. Как вытекат из (1.6), (3.12),

$$\| A_{kt} \|^2 \leqslant C \left(\frac{k}{t}\right)^{2\lambda_1}, \qquad k = 1, \ldots, t-1, \tag{4.5}$$

где C — некоторая положительная постоянная. Значит,

$$\sum_{k=1}^{t} \frac{\| A_{kt} \|^2}{k} m_{kt} \leqslant C \frac{\sum\limits_{k=1}^{t} k^{2\lambda_1 - 1} m_{kt}}{t^{2\lambda_1}}.$$

Поэтому (4.4) является следствием (4.3), (4.5) и без труда доказываемого равенства

$$\lim_{t\to\infty} \frac{2\lambda_1}{t^{2\lambda_1}} \sum_{k=1}^{t} k^{2\lambda_1 - 1} = 1. \tag{4.6}$$

Перейдем к непосредственному исследованию процесса

$$I_2(t) = \sum_{k=s}^{t} \frac{A_{kt}}{\sqrt{k}} \varphi(k+1).$$

Лемма 4.2. *Пусть A — устойчивая матрица,*

$$\varphi(t+1) = \Psi(t) + \sigma(t+1),$$

где $\Psi(t)$ $\mathscr{F}_t$-измерима,

$$\mathsf{M}(\sigma(t+1)/\mathscr{F}_t) \equiv 0$$

и, кроме того, для некоторого $\delta > 0$

$$\lim_{t\to\infty} t^{1/2+\delta} |\Psi(t)| = 0 \qquad (\text{п. н.}),$$

$$\lim_{t\to\infty} t^{\delta} \mathsf{M}(|\sigma(t+1)|^2/\mathscr{F}_t) = 0 \quad (\text{п. н.}).$$

Тогда $I_2(t)$ стремится к нулю с вероятностью 1 при $t\to\infty$.

Доказательство. Рассмотрим процесс $Y^y(t)$, определенный формулами

$$Y(t+1) - Y(t) = \frac{A}{t} Y(t) + \frac{\varphi(t+1)}{\sqrt{t}}, \quad Y^y(1) = y. \tag{4.7}$$

Тогда, очевидно, $Y^0(t) = I_2(t)$ и, значит, достаточно установить, что

$$\lim_{t\to\infty} Y^0(t) = 0 \quad (\text{п. н.}). \tag{4.8}$$

Наряду с (4.7) введем процесс $\hat{Y}^y(t)$, задаваемый рекуррентно:

$$\hat{Y}(t+1) - \hat{Y}(t) = \frac{A}{t}\hat{Y}(t) + \frac{(\Psi(t)\, t^{1/2+\delta})_N}{t^{1+\delta}} + \sigma_N(t+1), \quad \hat{Y}(1) = y,$$

где

$$\sigma_N(t+1) = \frac{\left(\sqrt{t^\delta \mathsf{M}(|\sigma(t+1)|^2/\mathscr{F}_t)}\right)_N \sigma(t+1)}{t^{1/2+\delta/2}\sqrt{\mathsf{M}(|\sigma(t+1)|^2/\mathscr{F}_t)}},$$

и покажем, что при любом $N > 0$

$$\lim_{t\to\infty} \hat{Y}^y(t) = 0 \quad (\text{п. н.}).$$

Отсюда будет вытекать (см. доказательство леммы 3.1) и требуемое равенство (4.8).

Положим

$$W(t, y) = (t-1)^\varkappa (Cy, y) + k(t-1)^{\varkappa-\delta}.$$

Здесь $0 < \varkappa < \delta$, $k > 0$, а C — симметричная положительно определенная матрица, удовлетворяющая равенству (3.8). Если $\hat{L}$ — оператор (4.2), соответствующий процессу $\hat{Y}^y(t)$, то, очевидно,

$$\hat{L}W(t, y) = t^\varkappa \mathsf{M}\left(\left(C\left(y + \frac{A}{t}y + \frac{(\Psi(t)\, t^{1/2+\delta})_N}{t^{1+\delta}} + \sigma_N(t+1)\right), y + \frac{A}{t}y + \frac{(\Psi(t)\, t^{1/2+\delta})_N}{t^{1+\delta}} + \sigma_N(t+1)\right)\Big/\mathscr{F}_t\right) + kt^{\varkappa-\delta} - (t-1)^\varkappa (Cy, y) - k(t-1)^{\varkappa-\delta}. \tag{4.9}$$

Вычисляя математическое ожиданис в (4.9) с учетом $\mathscr{F}_t$-измеримости $\Psi(t)$ и соотношений

$$\mathsf{M}(\sigma_N(t+1)/\mathscr{F}_t) = 0,$$

$$\mathsf{M}(|\sigma_N(t+1)|^2/\mathscr{F}_t) \leqslant \frac{N^2}{t^{1+\delta}},$$

получим оценку

$$LW(t, y) \leqslant -t^{\varkappa-1}|y|^2 + t^{\varkappa-1-\delta}(k_1|y| + k_2) + k_3 t^{\varkappa-2}|y|^2 + \\ + k_4 t^{\varkappa-2-\delta}|y| + (Cy, y)(t^{\varkappa} - (t-1)^{\varkappa}) + k(t^{\varkappa-\delta} - (t-1)^{\varkappa-\delta}).$$

Здесь и ниже $k_i = k_i(l, N, C)$. Отсюда вытекает, с учетом неравенств

$$t^{\varkappa} - (t-1)^{\varkappa} \leqslant \varkappa t^{\varkappa-1},$$
$$t^{\varkappa-\delta} - (t-1)^{\varkappa-\delta} \leqslant (\varkappa - \delta)(t-1)^{\varkappa-\delta-1},$$

что

$$LW(t, y) \leqslant t^{\varkappa-1}\left[(-1 + k_5\varkappa) + \frac{k_6}{t^{\delta}} + \frac{k_7}{t}\right]|y|^2 + \\ + k_2 t^{\varkappa-1-\delta} + k(\varkappa - \delta)(t-1)^{\varkappa-\delta-1}.$$

Поэтому $LW(t, y) \leqslant 0$ при всех достаточно больших t и $x \in E_l$, если $\varkappa$ выбрано достаточно малым, а k — достаточно большим. Для завершения доказательства теперь осталось почти дословно повторить соответствующие рассуждения, проведенные при доказательстве леммы 3.1.

Леммы 2.1 и 4.2 позволяют получить условия сходимости $I_2(t)$ к нулю по вероятности и п. н.

Лемма 4.3. *Пусть выполнены условия* 1, 2′ § 2, A — *устойчивая матрица*, $\varphi(t+1) = \delta(X^{s,\zeta}(t))$, *где* ζ $\mathscr{F}_s$-*измерима*, $\mathsf{M}|\zeta|^2 < \infty$, *а* $|\delta(x)| = o(|x - x_0|^{1+\mu})$ *при* $|x - x_0| \to 0$. *Тогда* $I_2(t)$ *стремится при* $t \to \infty$ *к нулю по вероятности, если* $\mu = 0$, *и с вероятностью* 1, *если* $\mu > 0$.

Доказательство. Пусть $x_0 = 0$ и $|\delta(x)| = o(|x|)$, $|x| \to 0$.

Выберем $\varepsilon > 0$, $\theta > 0$ и $T > 0$ так, чтобы выполнялись соотношения (3.10), (3.11). Тогда в силу неравенства Чебышева, (3.12), (2.3) и (1.6) будем иметь:

$$\mathsf{P}\left\{\left|\sum_{k=T}^{t} \frac{A_{kt}}{\sqrt{k}}\delta(X^{s,\zeta}(k))\right| > \varepsilon\right\} \leqslant$$
$$\leqslant \varepsilon + \mathsf{P}\left\{\left|\sum_{k=T}^{t} \frac{A_{kt}}{\sqrt{k}}\delta(X^{s,\zeta}(k))\right| > \varepsilon, \sup_{t \geqslant T}|X^{s,\zeta}(t)| < \theta\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon + \mathsf{P}\left\{\sum_{k=T}^{t} \frac{\|A_{kt}\|}{\sqrt{k}}\,|\,\delta(X^{s,\,\zeta}(k))\,| > \varepsilon,\ \sup_{t\geqslant T}|\,X^{s,\,\zeta}(t)\,| < \theta\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon + \mathsf{P}\left\{\sum_{k=T}^{t} \frac{\|A_{kt}\|}{\sqrt{k}}\,|\,X^{s,\,\zeta}(k)\,| > 1/\varepsilon\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon + \varepsilon \sum_{k=T}^{t} \frac{\|A_{kt}\|}{\sqrt{k}}\,\mathsf{M}\,|\,X^{s,\,\zeta}(k)\,| \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon + k_1\varepsilon \sum_{k=T}^{t}\left(\frac{k}{t}\right)^{\lambda_1}\frac{1}{k} \leqslant \varepsilon + k_2\varepsilon.$$

Отсюда вытекает первое утверждение. Доказательство второго утверждения дословно повторяет соответствующее рассуждение из леммы 3.2 с той лишь разницей, что вместо леммы 3.1 теперь нужно применить лемму 4.2 при $\sigma(t) \equiv 0$.

Задача 4.1. Пусть выполнены условия 1, 2′ § 2, A — устойчивая матрица, а $\varphi(t+1) = \alpha(t)\,\theta(X^{s,\,\zeta}(t))$, где $\alpha(t) = O(1/t^{\mu})$, $\mu > 0$, $t \to \infty$, $|\,\theta(x)\,| \leqslant C\,|\,x\,|$, $C = \mathrm{const}$. Показать, что если ζ $\mathscr{F}_s$-измерима и $\mathsf{M}\,|\,\zeta\,|^2 < \infty$, то

$$\lim_{t\to\infty} I_2(t) = 0 \quad (\text{п. н.}).$$

Для решения этой задачи нужно воспользоваться леммой 4.2. Очевидным следствием этой же леммы и леммы 2.1 является

Лемма 4.4. *Пусть выполнены условия* 1, 2′ § 2, *A — устойчивая матрица,* $\varphi(t+1) = \Phi(t+1, X^{s,\,\zeta}(t), \omega)$, ζ *$\mathscr{F}_s$-измерима,* $\mathsf{M}\,|\,\zeta\,|^2 < \infty$, $\mathsf{M}\Phi(t, x, \omega) \equiv 0$,

$$\mathsf{M}\,|\,\Phi(t, x, \omega)\,|^2 \leqslant k\,|\,x - x_0\,|^{\nu}, \quad \nu > 0,\ k > 0,$$

в некоторой окрестности точки $x = x_0$, причем $\Phi(t, x, \omega)$ удовлетворяет условиям (A) § 2.3. Тогда

$$\lim_{t\to\infty} I_2(t) = 0 \quad (\text{п. н.}).$$

§ 5. Асимптотическая нормальность (непрерывное время)

Следующая теорема содержит достаточные условия для асимптотической нормальности нормированного процесса $X^x(t) = X^{1,x}(t)$ с непрерывным временем.

Теорема 5.1. *Пусть выполнены следующие условия:*
1) *функции* $R(x)$, $\sigma_r(t, x)$ *удовлетворяют условиям* (B) § 3.7, *а процесс* $X^x(t)$, *являющийся решением уравнения* (2.1), *стремится п. н. к* x_0 *при* $t \to \infty$,

2) *функция* $R(x)$ *допускает представление* (1.1), *а матрица* $A = aB + {}^1/{}_2J$ *устойчива*,

3) *при* $r = 1, \ldots, k$

$$\lim_{\substack{t\to\infty\\ x\to x_0}} \sigma_r(t, x) = \sigma_r^{(0)}. \tag{5.1}$$

Тогда

$$\sqrt{t}\,(X^x(t) - x_0) \sim \mathfrak{N}(0, S),$$

где

$$S = a^2 \int_0^\infty e^{Av} S_0 e^{A^* v}\, dv, \qquad S_0 = \sum_{r=1}^{k} \sigma_r^{(0)} \sigma_r^{(0)*}.$$

Доказательство. Пусть для простоты $x_0 = 0$. Обозначим $\lambda_1, \ldots, \lambda_l$ собственные значения матрицы B, $\tilde{\lambda} = \min\limits_{1 \le i \le l} |\operatorname{Re} \lambda_i|$. Заметим, что $2a\tilde{\lambda} > 1$ в силу устойчивости матрицы A. Согласно следствию 3.1 для любого положительного числа $\lambda_0 < \tilde{\lambda}$ найдется симметричная положительно определенная матрица C такая, что

$$(CBx, x) \leqslant -\lambda_0 (Cx, x).$$

Так как $|\delta(x)| = o(|x|)$ при $x \to 0$, то для любого $\lambda < \lambda_0$ можно выбрать такое ε, что при $|x| < \varepsilon$ выполнено соотношение

$$(CR(x), x) < -\lambda (Cx, x). \tag{5.2}$$

Учитывая неравенство $2a\tilde{\lambda} > 1$, можно считать число λ в (5.2) связанным неравенством

$$2a\lambda > 1. \tag{5.3}$$

Положим

$$\hat{R}(x)=\begin{cases} R(x) & \text{при} \quad |x|<\varepsilon, \\ R\left(\dfrac{\varepsilon x}{|x|}\right)\dfrac{|x|}{\varepsilon} & \text{при} \quad |x|\geqslant\varepsilon, \end{cases}$$

$$\hat{\sigma}_r(t, x)=\begin{cases} \sigma_r(t, x) & \text{при} \quad |x|<\varepsilon, \\ \sigma_r\left(t, \dfrac{\varepsilon x}{|x|}\right) & \text{при} \quad |x|\geqslant\varepsilon \end{cases}$$

и рассмотрим наряду с (2.1) стохастическое уравнение

$$d\hat{X}(t)=\frac{a}{t}\left(\hat{R}(\hat{X}(t))\,dt+\sum_{r=1}^{k}\hat{\sigma}_r(t, \hat{X}(t))\,d\xi_r(t)\right). \quad (5.4)$$

Коэффициенты этого уравнения удовлетворяют, очевидно, условиям 1, 2 § 2. Кроме того, для процесса $\hat{Y}(t)=\sqrt{t}\,\hat{X}^{s,\zeta}(t)$ справедливо согласно (1.3) соотношение (ζ $\mathscr{F}_s$-измерима, $\mathsf{M}\,|\zeta|^2<\infty$)

$$\hat{Y}(t)=e^{A\ln(t/s)}\sqrt{s}\,\zeta+a\int_s^t\frac{e^{A\ln(t/u)}}{\sqrt{u}}\Big[\hat{\delta}(\hat{X}^{s,\zeta}(u))\,du+$$

$$+\sum_{r=1}^{k}\hat{\sigma}_r(u, \hat{X}^{s,\zeta}(u))\,d\xi_r(u)\Big], \quad (5.5)$$

где $\hat{\delta}(x)=\hat{R}(x)-Bx$.

Покажем, что

а) $\lim\limits_{t\to\infty}e^{A\ln(t/s)}\sqrt{s}\,\zeta=0$ (п. н.),

б) $\lim\limits_{t\to\infty}\displaystyle\int_s^t\frac{e^{A\ln(t/u)}}{\sqrt{u}}\hat{\delta}(\hat{X}^{s,\zeta}(u))\,du=0$ по вероятности,

в) $\eta(t)=\displaystyle\int_s^t\frac{e^{A\ln(t/u)}}{\sqrt{u}}\sum_{r=1}^{k}\hat{\sigma}_r(u, X^{s,\zeta}(u))\,d\xi_r(u)\sim\mathfrak{N}(0, a^{-2}S)$.

Первое из этих равенств вытекает из оценки (3.12), а второе — из леммы 3.2 при $\mu=0$.

Далее,

$$\eta(t)=\eta_1(t)+\eta_2(t), \qquad \eta_1(t)=\int_s^t \frac{e^{A\ln(t/u)}}{\sqrt{u}}\Psi(u)\,d\xi_r(u),$$

$$\Psi(u)=\sum_{r=1}^{k}(\sigma_r(u, X^{s,\zeta}(u))-\sigma_r^{(0)}),$$

$$\eta_2(t)=\int_s^t \frac{e^{A\ln(t/u)}}{\sqrt{u}}\sum_{r=1}^{k}\sigma_r^{(0)}\,d\xi_r(u).$$

Очевидно, в силу (3.3.6), что

$$\mathsf{M}\eta_1(t)\,\eta_1^*(t)=\int_s^t \frac{e^{A\ln(t/u)}\mathsf{M}\Psi(u)\,\Psi^*(u)\,e^{A^*\ln(t/u)}}{u}\,du.$$

Так как для процесса $\hat{X}^{s,\zeta}(t)$ выполнены условия леммы 2.1, то $\hat{X}^{s,\zeta}(t)\to 0$ п. н. при $t\to\infty$.

Отсюда, из теоремы Лебега и (5.1) вытекает, что

$$\lim_{u\to\infty}\mathsf{M}\,\|\,\Psi(u)\,\Psi^*(u)\,\|=0$$

и, значит, принимая во внимание оценку (3.12),

$$\|\,\mathsf{M}\eta_1(t)\,\eta_1^*(t)\,\|\leqslant\int_s^t \frac{\|\,e^{A\ln(t/u)}\|^2}{u}\,\|\,\mathsf{M}\Psi(u)\,\Psi^*(u)\,\|\,du\leqslant$$

$$\leqslant\frac{k}{t^{2\lambda_1}}\int_s^t u^{2\lambda_1-1}\,\|\,\mathsf{M}\Psi(u)\,\Psi^*(u)\,\|\,du\to 0 \text{ при } t\to\infty.$$

Так как $\mathsf{M}\eta_1(t)=0$ и $\|\,\mathsf{M}\eta_1(t)\,\eta_1^*(t)\,\|\to 0$ при $t\to\infty$, то $\eta_1(t)\to 0$ по вероятности в силу неравенства Чебышева.

Заметим теперь, что $\eta_2(t)$ — гауссовский процесс с нулевым средним. Вычислим его корреляционную матрицу:

$$\mathsf{M}\eta_2(t)\,\eta_2^*(t)=\int_s^t \frac{e^{A\ln(t/u)}S_0e^{A^*\ln(t/u)}}{u}\,du=\int_0^{\ln(t/s)} e^{Av}S_0e^{A^*v}dv.$$

Значит, при $t\to\infty$

$$\mathsf{M}\eta_2(t)\,\eta_2^*(t)\to\frac{1}{a^2}S.$$

Отсюда вытекает утверждение в).

Таким образом, мы установили, что

$$\sqrt{t}\,\hat{X}^{s,\varepsilon}(t) \sim \mathfrak{N}(0, S).$$

Пусть теперь $X^x(t)$ — решение уравнения (2.1) с начальным условием $X^x(1) = x$, ν — произвольное положительное число. Выберем T из условия

$$\mathsf{P}\{\sup_{t \geqslant T} |X^x(t)| < \varepsilon\} > 1 - \nu, \tag{5.6}$$

Тогда, если $\hat{X}(t)$ — решение уравнения (5.4) с начальным условием $\hat{X}(T) = (X^x(T))_\varepsilon$, то

$$\mathsf{P}\{\sup_{t \geqslant T} |X^x(t) - \hat{X}(t)| > 0\} < \nu. \tag{5.7}$$

Кроме того, для любого борелевского множества A

$$\begin{aligned}
&\varlimsup_{t\to\infty} \mathsf{P}\{\sqrt{t}X^x(t) \in A\} \leqslant \\
&\quad \leqslant \varlimsup_{t\to\infty} \mathsf{P}\{\sqrt{t}X^x(t) \in A,\ \sup_{t \geqslant T} |X^x(t) - \hat{X}(t)| = 0\} + \\
&\quad + \varlimsup_{t\to\infty} \mathsf{P}\{\sqrt{t}X^x(t) \in A,\ \sup_{t \geqslant T} |X^x(t) - \hat{X}(t)| > 0\} \leqslant \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \leqslant \varlimsup_{t\to\infty} \mathsf{P}\{\sqrt{t}\hat{X}(t) \in A\} + \nu.
\end{aligned}$$

Аналогично,

$$\varliminf_{t\to\infty} \mathsf{P}\{\sqrt{t}X^x(t) \in A\} \geqslant \varliminf_{t\to\infty} \mathsf{P}\{\sqrt{t}\hat{X}(t) \in A\} - \nu.$$

В силу произвольности ν и уже доказанной асимптотической нормальности процесса $\hat{Y}(t)$, отсюда вытекает утверждение теоремы.

Из только что доказанной теоремы и теоремы 4.3.1 для процесса $X^x(t)$, описываемого одномерным стохастическим дифференциальным уравнением

$$dX(t) = \frac{a}{t}(R(X(t)) + \sigma(t, X(t))\,d\xi(t)), \qquad a > 0, \tag{5.8}$$

вытекает следующее утверждение.

Теорема 5.2. *Пусть функции* $R(x)$, $\sigma(t, x)$ *удовлетворяют условиям* (B) § 3.7 *и, кроме того,*

а) *справедливо при* $x \neq x_0$ *неравенство*

$$R(x)(x - x_0) < 0,$$

б) *функция* $R(x)$ *допускает представление*

$$R(x) = -\alpha(x - x_0) + o(|x - x_0|) \text{ при } x \to x_0,$$

причем $\alpha > 1/2a$,

в) *существует конечный предел*

$$\lim_{\substack{t\to\infty \\ x\to x_0}} \sigma^2(t, x) = \sigma_0^2.$$

Тогда для любого решения $X^x(t)$, $x \in E_1$, *уравнения* (5.8) *справедливо соотношение*

$$\sqrt{t}\,(X^x(t) - x_0) \sim \mathfrak{N}\left(0,\ \frac{a^2\sigma_0^2}{2a\alpha - 1}\right).$$

Отметим один частный случай, когда матрица S из теоремы 5.1 выражается особенно просто. Этот частный случай постоянно встречается ниже, в главах 8—10.

Следствие 5.1. Если $a = 1$, $B = -J$, то

$$S = \int_0^\infty e^{-u} S_0\, du = S_0.$$

Покажем теперь, что при несколько более жестких условиях на коэффициенты уравнения (2.1) можно гарантировать не только асимптотическую нормальность

$$Y(t) = \sqrt{t}\,(X^x(t) - x_0),$$

но и сходимость процесса $Y(t)$ в некотором новом масштабе времени к стационарному гауссовскому процессу.

Напомним, что случайный процесс $X(t)$ называется *стационарным* (в узком смысле), если совместное распределение случайных величин $X(t_1 + t), \ldots, X(t_n + t)$ не зависит от t для любого набора $t_1, \ldots, t_n$. Будем также пользоваться следующим хорошо известным фактом: гауссовский случайный процесс $X(t)$ стационарен, если математическое ожидание $m(t) = \mathsf{M}\, X(t)$ и корреляционная матрица $\mathsf{M}\,(X(t) - m(t))\,(X(t + s) - m(t + s))^*$ не зависят от t.

Теорема 5.3. *Пусть выполнены следующие условия:*

1) *функции* $R(x)$, $\sigma_r(t, x)$ *удовлетворяют условиям* (В) § 3.7, *а процесс* $X^x(t)$, *определяемый уравнением* (2.1), *стремится п. н. к* x_0 *при* $t \to \infty$;

2) *функция* $R(x)$ *допускает представление* (1.1), *где*

$$\delta(x) = o(|x - x_0|^{1+\mu}) \text{ при } x \to x_0,\ \mu \geqslant 0,$$

а матрица $A = aB + {}^1/_2 J$ *устойчива;*

3) *в некоторой окрестности точки* x_0

$$|\sigma_r(t, x) - \sigma_r(t, x_0)| \leqslant C\,|x - x_0|^\nu,$$
$$\nu > 0, \quad C = \text{const}, \tag{5.9}$$

причем для некоторого $\delta > 0$ *и постоянного вектора* $\sigma_r^{(0)}$

$$t^\delta(\sigma_r(t, x_0) - \sigma_r^{(0)}) \to 0 \text{ при } t \to \infty. \tag{5.10}$$

Тогда

$$\lim_{t\to\infty} [\sqrt{e^t}\,(X^x(e^t) - x_0) - Z(t)] = 0$$

с вероятностью 1, *если* $\mu > 0$, *и по вероятности, если* $\mu = 0$, *где* $Z(t)$ — *стационарный гауссовский марковский случайный процесс с нулевым математическим ожиданием и корреляционной матрицей*

$$R(u) = a^2 \int_0^\infty e^{Av} S_0 e^{A^*v}\,dv\, e^{A^*u} = Se^{A^*u}.$$

Доказательство. Как и при доказательстве предыдущей теоремы, будем считать $x_0 = 0$ и выберем $\lambda > 0$, $\varepsilon > 0$ так, чтобы выполнялись соотношения (5.2), (5.3). Рассмотрим процесс $\hat{X}^{s,\zeta}(t)$, описываемый уравнением (5.4) (ζ $\mathcal{F}_s$-измерима, $\mathsf{M}\,|\zeta|^2 < \infty$), и запишем равенство (5.5) для $\hat{Y}(t) = \sqrt{t}\,\hat{X}^{s,\zeta}(t)$ в виде

$$\hat{Y}(t) = e^{A\ln(t/s)}\sqrt{s}\,\zeta + a\int_s^t \frac{e^{A\ln(t/u)}}{\sqrt{u}}\,\hat{\delta}(\hat{X}^{s,\zeta}(u))\,du +$$
$$+ a\int_s^t \frac{e^{A\ln(t/u)}}{\sqrt{u}} \sum_{r=1}^k [\hat{\sigma}_r(u, \hat{X}^{s,\zeta}(u)) - \hat{\sigma}_r(u, 0)]\,d\xi_r(u) +$$
$$+ a\int_s^t \frac{e^{A\ln(t/u)}}{\sqrt{u}} \sum_{r=1}^k [\hat{\sigma}_r(u, 0) - \sigma_r^{(0)}]\,d\xi_r(u) +$$
$$+ a\int_s^t \frac{e^{A\ln(t/u)}}{\sqrt{u}} \sum_{r=1}^k \sigma_r^{(0)}\,d\xi_r(u), \tag{5.11}$$

где $\hat{\delta}(x) = \hat{R}(x) - Bx$.

В силу (3.12)

$$\lim_{t\to\infty} e^{A\ln(t/s)}\sqrt{s}\zeta = 0.$$

По лемме 3.2

$$\lim_{t\to\infty}\int_s^t \frac{e^{A\ln(t/u)}}{\sqrt{u}}\,\hat{\delta}\,(X^{s,\zeta}(u))\,du = 0$$

с вероятностью 1, если $\mu > 0$, и по вероятности, если $\mu = 0$. Кроме того,

$$\lim_{t\to\infty}\int_s^t \frac{e^{A\ln(t/u)}}{\sqrt{u}}\sum_{r=1}^{k}[\hat{\sigma}_r(u,\,\hat{X}^{s,\zeta}(u)) -$$

$$- \hat{\sigma}_r(u,\,0)]\,d\xi_r(u) = 0 \quad (\text{п. н.}),$$

$$\lim_{t\to\infty}\int_s^t \frac{e^{A\ln(t/u)}}{\sqrt{u}}\sum_{r=1}^{k}[\hat{\sigma}_r(u,\,0) - \sigma_r^{(0)}]\,d\xi_r(u) = 0 \quad (\text{п. н.}).$$

Первое из этих соотношений вытекает из (5.9) и леммы 3.3, а второе является следствием (5.10) и леммы 3.1.

Из полученных равенств и (5.11) вытекает, что при $t\to\infty$

$$\hat{Y}(t) - a\int_s^t \frac{e^{A\ln t/u}}{\sqrt{u}}\sum_{r=1}^{k}\sigma_r^{(0)}\,d\xi_r(u) \to 0, \tag{5.12}$$

почти наверное (по вероятности), если $\mu > 0$ ($\mu = 0$).

Положим, далее,

$$\tilde{\xi}_r(t) = \int_1^{e^t}\frac{d\xi_r(u)}{\sqrt{u}}.$$

Пользуясь свойствами стохастического интеграла, легко проверить равенства

$$\mathsf{M}\tilde{\xi}_r(t) = 0,$$

$$\mathsf{M}\,(\tilde{\xi}_r(t) - \tilde{\xi}_r(s))^2 = \int_{e^s}^{e^t}\frac{du}{u} = t - s, \qquad t \geqslant s.$$

Кроме того, приращения процесса $\tilde{\xi}_r(t)$ на непересекающихся интервалах времени независимы и имеют нормальное распределение. Поэтому (см. § 3.1) $\tilde{\xi}(t) = (\tilde{\xi}_1(t), \ldots, \tilde{\xi}_l(t))$ — стандартный винеровский процесс в E_l. Учитывая это и полагая в (5.12) e^t вместо t, получим

$$\hat{Y}(e^t) - a\int_s^{e^t} e^{A\ln\frac{e^t}{u}} \sum_{r=1}^k \sigma_r^{(0)}\, d\xi_r(\ln u) = \\ = \hat{Y}(e^t) - a\int_{\ln s}^{t} e^{A(t-v)} \sum_{r=1}^k \sigma_r^{(0)}\, d\tilde{\xi}_r(v).$$

Отсюда и из устойчивости матрицы A вытекает, что при $t \to \infty$

$$\hat{Y}(e^t) - Z(t) \to 0 \tag{5.13}$$

почти наверное ($\mu > 0$) или по вероятности ($\mu = 0$), где

$$Z(t) = e^{At}\left[\eta + a\int_0^t e^{-Av} \sum_{r=1}^k \sigma_r^{(0)}\, d\tilde{\xi}_r(v)\right],$$

а η — любая не зависящая от $\tilde{\xi}_r(v)$, $r = 1, \ldots, k$, случайная величина. Пусть теперь η — гауссовская случайная величина с нулевым средним и ковариационной матрицей

$$\mathsf{M}\eta\eta^* = S.$$

Тогда процесс $Z(t)$ — гауссовский с нулевым средним. Чтобы убедиться в его стационарности, достаточно показать, что функция $R(t, u) = \mathsf{M}Z(t)Z^*(t+u)$ не зависит от t. Последнее вытекает из формул

$$R(t, u) = e^{At}\left[\mathsf{M}\eta\eta^* + a^2\int_0^t e^{-Av}S_0 e^{-A^*v}\, dv\right] e^{A^*(t+u)} = \\ = e^{At}\left[S + a^2\int_0^t e^{-Av}S_0 e^{-A^*v}\, dv\right] e^{A^*t}e^{A^*u} = \\ = a^2 e^{At}\int_{-\infty}^{t} e^{-Av}S_0 e^{-A^*v}\, dv\, e^{A^*t}e^{A^*u} = \\ = a^2\int_0^{\infty} e^{Av}S_0 e^{A^*v}dv\, e^{A^*u} = Se^{A^*u}.$$

Пусть теперь ν произвольно, а T выбрано из условия (5.6). Тогда для решения $X(t)$ уравнения (5.4) с начальным условием $X(T) = (X^x(T))_\varepsilon$ имеет место неравенство (5.7). Значит,

$$\mathsf{P}\{\lim_{t\to\infty}[\sqrt{e^t}X^x(e^t) - Z(t)] = 0\} > 1 - \nu.$$

В силу произвольности ν отсюда вытекает первое утверждение теоремы. Из (5.13) вполне аналогично получим и второе утверждение.

Из теоремы 5.3 немедленно вытекает

Следствие 5.2. При $T\to\infty$ конечномерные распределения процесса

$$Y_T(t) = \sqrt{T}e^{t/2}(X^x(Te^t) - x_0)$$

сходятся к конечномерным распределениям процесса $Z(t)$.

Замечание 5.1. Теоремы 5.1, 5.2, 5.3 доказаны в предположении, что функция $a(t)$, входящая в уравнения стохастической аппроксимации, имеет вид a/t, где $a = \mathrm{const} > 0$. Легко, однако, видеть, что эти теоремы остаются справедливыми и в случае, когда $a(t) = a/t + o(1/t^{1+\varepsilon})$ при $t\to\infty$, где $\varepsilon > 0$. В частности, ниже мы будем иногда полагать $a(t) = a/(t+1)$.

§ 6. Асимптотическая нормальность (дискретное время)

Рассмотрим теперь процесс $X^x(t)$, определяемый рекуррентной формулой (2.2) и начальным условием $X^x(1) = x$. Следующая теорема содержит достаточные условия, при выполнении которых последовательность $\sqrt{t}(X^x(t) - x_0)$ асимптотически нормальна.

Теорема 6.1. *Предположим, что*

1) *функция* $\Phi(t, x, \omega) = R(x) + G(t, x, \omega)$ *удовлетворяет условиям* (A) § 2.3, *а процесс* $X^x(t)$, *определяемый из* (2.2), *сходится к* x_0 *п. н. при* $t\to\infty$,

2) *функция* $R(x)$ *допускает представление* (1.1), *где матрица* $A = aB + 1/2J$ *устойчива*,

3) *все элементы матрицы*

$$A(t, x) = \mathsf{M}G(t+1, x, \omega)G^*(t+1, x, \omega) \quad (6.1)$$

конечны при $t \geqslant 1$, $x \in E_l$, *причем*

$$\lim_{\substack{t\to\infty \\ x\to x_0}} A(t, x) = A(\infty, x_0) = S_0, \tag{6.2}$$

4) *для некоторого* $\theta > 0$

$$\lim_{R\to\infty} \sup_{|x-x_0|<\theta} \sup_{t\geqslant 1} \int_{|G(t, x, \omega)|>R} |G(t, x, \omega)|^2 \mathsf{P}\{d\omega\} = 0. \tag{6.3}$$

Тогда

$$\sqrt{t}\,(X^x(t) - x_0) \sim \mathfrak{N}(0, S),$$

где

$$S = a^2 \int_0^\infty e^{Av} S_0 e^{A^*v}\, dv.$$

Доказательство. Можно считать $x_0 = 0$. Пусть симметричная положительно определенная матрица C и постоянные $\varepsilon > 0$, $\lambda > 0$ выбраны так, что выполнены неравенства (5.2), (5.3). Положим

$$\hat{R}(x) = \begin{cases} R(x), & \text{если } |x| < \varepsilon, \\ -\lambda x, & \text{если } |x| \geqslant \varepsilon, \end{cases}$$

$$\hat{G}(t, x, \omega) = \begin{cases} G(t, x, \omega), & \text{если } |x| < \varepsilon, \\ 0, & \text{если } |x| \geqslant \varepsilon, \end{cases}$$

и рассмотрим новый процесс $\hat{X}^{s,\zeta}(t)$, определенный формулами

$$\hat{X}(t+1) - \hat{X}(t) = \frac{a}{t}[\hat{R}(\hat{X}(t)) + \hat{G}(t+1, \hat{X}(t), \omega)],$$

$$\hat{X}(s) = \zeta. \tag{6.4}$$

Здесь ζ — $\mathscr{F}_s$-измеримая случайная величина, $\mathsf{M}\,|\zeta|^2 < \infty$. Очевидно, функции $\hat{R}(x)$, $\hat{G}(t, x, \omega)$ удовлетворяют условиям 1, 2′ § 2.

Докажем, что

$$\hat{Y}(t) = \sqrt{t}\,\hat{X}^{s,\zeta}(t) \sim \mathfrak{N}(0, S). \tag{6.5}$$

В силу представления (1.5) достаточно установить соотношения:

а) $\lim\limits_{t\to\infty} A_{s-1\,t}\sqrt{s}\zeta = 0,$

б) $\lim\limits_{t\to\infty}\sum\limits_{k=s}^{t}\frac{A_{kt}}{\sqrt{k}}C(k)\hat{X}^{s,\zeta}(k) = 0$ (п. н.),

в) $\lim\limits_{t\to\infty}\sum\limits_{k=s}^{t}\frac{A_{kt}}{\sqrt{k}}\sqrt{1+\frac{1}{k}}\,\delta(\hat{X}^{s,\zeta}(k)) = 0$ по вероятности,

где $\delta(x) = \hat{R}(x) - Bx$,

г) $$\eta(t) = \sum_{k=s}^{t}\frac{A_{kt}}{\sqrt{k}}\sqrt{1+\frac{1}{k}}\,\hat{G}(k+1,\ \hat{X}^{s,\zeta}(k),\ \omega) \sim \\ \sim \mathfrak{N}\left(0,\ \frac{S}{a^2}\right).$$

Соотношение а) вытекает из (1.6) и (3.12), а равенства б), в) являются следствием соответственно результата задачи 4.1 и леммы 4.3 при $\mu = 0$. Осталось установить г). Для этого проверим, что случайные величины

$$\xi_{tk} = \frac{A_{kt}}{\sqrt{k}}\sqrt{1+\frac{1}{k}}\,\hat{G}(k+1,\ \hat{X}^{s,\zeta}(k),\ \omega)$$

удовлетворяют условиям теоремы 1.1.

Во-первых,

$$S_{tk} = \mathsf{M}\xi_{tk}\xi_{tk}^{*} = \frac{1+\frac{1}{k}}{k}A_{kt}\times \\ \times\mathsf{M}[\hat{G}(k+1,\ \hat{X}^{s,\zeta}(k),\ \omega)\,\hat{G}^{*}(k+1,\ \hat{X}^{s,\zeta}(k),\ \omega)]\,A_{kt}^{*},$$

$$R_{tk} = \frac{1+\frac{1}{k}}{k}A_{kt}\times \\ \times\mathsf{M}\,[\hat{G}(k+1,\ \hat{X}^{s,\zeta}(k),\ \omega)\hat{G}^{*}(k+1,\ \hat{X}^{s,\zeta}(k),\ \omega)/\mathscr{F}_t)]\,A_{kt}^{*}$$

и, значит,

$$f_1(t) = \sum_{k=s}^{t}\mathsf{M}\,\|S_{tk} - R_{tk}\| \leqslant c_1\sum_{k=s}^{t}\frac{\|A_{kt}\|^2}{k}m_k,$$

где

$$m_k = \mathsf{M} \| \mathsf{M}\hat{A}(k,\ \bar{X}^{s,\zeta}(k)) - \hat{A}(k,\ \bar{X}^{s,\zeta}(k)) \|,$$

$$\hat{A}(k,\ x) = \mathsf{M}\bar{G}(k+1,\ x,\ \omega)\,\bar{G}^*(k+1,\ x,\ \omega).$$

Так как функция $\hat{A}\ (k,\ x)$ ограничена при всех $k \geqslant 1$, $x \in E_l$ и выполнено условие (6.2), то в силу теоремы Лебега

$$\lim_{k\to\infty} \mathsf{M}\hat{A}(k,\ \bar{X}^{s,\zeta}(k)) = S_0. \tag{6.6}$$

Повторное применение теоремы Лебега с учетом равенства

$$\lim_{k\to\infty} \hat{A}(k,\ \bar{X}^{s,\zeta}(k)) = S_0 \quad (\text{п. н.})$$

и (6.6) приводит к соотношению

$$\lim_{k\to\infty} m_k = 0.$$

Значит, согласно лемме 4.1

$$\lim_{t\to\infty} f_1(t) = 0.$$

Во-вторых,

$$f_2(t) = \sum_{k=s}^{t} \mathsf{M}\,|\,\xi_{tk}\,|^2\,\chi^{\varepsilon}_{tk} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=s}^{t} \frac{\|A_{kt}\|^2}{k}\left(1+\frac{1}{k}\right)\mathsf{M}\,|\,\bar{G}(k+1,\ \bar{X}^{s,\zeta}(k),\ \omega)\,|^2\,\chi^{\varepsilon}_{tk}.$$

Но из ограниченности $\|A_{kt}\|$ при всех $1 \leqslant k \leqslant t$ вытекает, что

$$\chi^{\varepsilon}_{tk} = \chi_{\left|\frac{A_{kt}}{\sqrt{k}}\sqrt{1+\frac{1}{k}}\,\bar{G}(k+1,\ \hat{X}^{s,\zeta}(k),\ \omega)\right| > \varepsilon} \leqslant$$

$$\leqslant \chi_{|\bar{G}(k+1,\ \bar{X}^{s,\zeta}(k),\ \omega)| > c_2\varepsilon\sqrt{k}}.$$

Следовательно,

$$0 \leqslant \overline{\lim_{t\to\infty}}\, f_2(t) \leqslant c_3 \lim_{t\to\infty} \sum_{k=s}^{t} \frac{\|A_{kt}\|^2}{k}\, m'_k,$$

где

$$m_k' = \int\limits_{|\tilde{G}(k+1,\, \tilde{X}^{s,\,\zeta}(k),\, \omega)| > c_2\varepsilon\sqrt{k}} |\tilde{G}(k+1,\, \tilde{X}^{s,\,\zeta}(k),\, \omega)|^2 \mathsf{P}\{d\omega\} \to 0$$

п. н. при $k \to \infty$ в силу (6.3). Отсюда и из леммы 4.1 имеем

$$\lim_{t\to\infty} f_2(t) = 0.$$

Далее,

$$S(t) = \sum_{k=s}^{t} S_{tk} = \sum_{k=s}^{t} \frac{\left(1+\frac{1}{k}\right)}{k} A_{kt} \mathsf{M} \hat{A}(k,\, \tilde{X}^{s,\,\zeta}(k))\, A_{kt}^* =$$

$$= \sum_{k=s}^{t} \frac{A_{kt} S_0 A_{kt}^*}{k} + \sum_{k=s}^{t} \frac{\left(1+\frac{1}{k}\right)}{k} A_{kt}\, [\mathsf{M}\hat{A}(k,\, \tilde{X}^{s,\,\zeta}(k)) - S_0]\, A_{kt}^* + \sum_{k=s}^{t} \frac{1}{k^2} A_{kt} S_0 A_{kt}^*, \qquad (6.7)$$

причем две последние суммы в (6.7) стремятся к нулю п. н. при $t \to \infty$ в силу (6.6) и леммы 4.1. В силу этой же леммы и (1.6)

$$\sum_{k=s}^{t} \frac{A_{kt} S_0 A_{kt}^*}{k} - \sum_{k=1}^{t} \frac{e^{A \ln (t/k)} S_0 e^{A^* \ln (t/k)}}{k} \to 0 \qquad (6.8)$$

при $k \to \infty$.

Очевидно,

$$\sum_{k=1}^{t} \frac{e^{A \ln (t/k)} S_0 e^{A^* \ln (t/k)}}{k} = \sum_{k=1}^{t} \frac{e^{-A \ln (k/t)} S_0 e^{-A^* \ln (k/t)}}{\frac{k}{t}} \cdot \frac{1}{t}$$

есть интегральная сумма несобственного интеграла

$$\int_0^1 \frac{e^{-A \ln u} S_0 e^{-A^* \ln u}}{u}\, du.$$

Кроме того, из (4.5) и (4.6) вытекает, что

$$\sum_{k=1}^{[\varepsilon t]} \frac{e^{A \ln (t/k)} S_0 e^{A^* \ln (t/k)}}{k} \to 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0$$

равномерно по $t \geqslant 1$. Поэтому справедливо соотношение

$$\int_0^1 \frac{e^{-A \ln u} S_0 e^{-A^* \ln u}}{u} du = \lim_{t \to \infty} \sum_{k=1}^{t} \frac{e^{A \ln t/k} S_0 e^{A^* \ln t/k}}{k}.$$

Отсюда, из (6.7), (6.8) и равенства

$$\int_0^1 \frac{e^{-A \ln u} S_0 e^{-A^* \ln u}}{u} du = \frac{S}{a^2}$$

вытекает, что

$$a^2 \lim_{t \to \infty} S(t) = S.$$

Таким образом, мы проверили все условия теоремы 1.1, и, тем самым, соотношение (6.5) установлено. Для завершения доказательства теоремы теперь достаточно почти дословно повторить рассуждения, проведенные в конце доказательства теоремы 5.1.

З а м е ч а н и е 6.1. Если случайные величины $G(t) = G(t, x, \omega)$ не зависят от x и одинаково распределены, то соотношение (6.3) выполнено, если

$$\mathsf{M} \, | G(t) |^2 < \infty.$$

Рассмотрим, в частности, одномерный процесс, описываемый формулами

$$X(t+1) - X(t) = \frac{a}{t} [R(X(t)) + G(t+1, X(t), \omega)] =$$
$$= \Phi(t+1, x, \omega), \qquad X(1) = x \in E_1. \quad (6.9)$$

Из теорем 6.1 и 4.1.1 для этого процесса вытекает следующая

Теорема 6.2. *Пусть функция* $\Phi(t, x, \omega)$ *удовлетворяет условиям* (A) § 2.3 *и, кроме того,*

а) *при любом* $\varepsilon > 0$

$$\sup_{\varepsilon < |x - x_0| < \varepsilon^{-1}} [R(x)(x - x_0)] < 0,$$

б) *при всех* $x \in E_l$ *справедливо неравенство*

$$R^2(x) + \mathsf{M}G^2(t, x, \omega) \leqslant k(1 + x^2), \ k = \text{const},$$

в) *функция* $R(x)$ *допускает представление*

$$R(x) = -\alpha(x - x_0) + o(|x - x_0|) \quad \text{при } x \to x_0,$$

причем $\alpha > 1/2a$,

г) *существует конечный предел*

$$\lim_{\substack{t \to \infty \\ x \to x_0}} A(t, x) = A(\infty, x_0) = \sigma_0^2,$$

где

$$A(t, x) = \mathsf{M}G^2(t, x, \omega),$$

д) *выполнено соотношение*

$$\lim_{R \to \infty} \sup_{|x - x_0| < \theta} \sup_{t \geqslant 1} \int\limits_{|G(t, x, \omega)| > R} G^2(t, x, \omega)\, \mathsf{P}\{d\omega\} = 0.$$

Тогда для процесса $X^x(t)$, *определяемого с помощью* (6.9), *справедливо соотношение*

$$\sqrt{t}\,(X^x(t) - x_0) \sim \mathfrak{N}\left(0, \frac{a^2\sigma_0^2}{2a\alpha - 1}\right).$$

Лемма 6.1. *Предположим, что*

1) *функция* $\Phi(t, x, \omega) = R(x) + G(t, x, \omega)$ *удовлетворяет условиям* (A) § 2.3, *а процесс* $X^x(t)$, *определяемый из* (2.2), *сходится к* x_0 *п. н. при* $t \to \infty$,

2) *функция* $R(x)$ *допускает представление* (1.1), *где*

$$|\delta(x)| = o(|x - x_0|^{1+\mu}) \quad \text{при } x \to x_0, \ \mu \geqslant 0,$$

а матрица $A = aB + {}^1/_2 J$ *устойчива*,

3) *все элементы матрицы* $A(t, x)$ в (6.1) *конечны при* $t \geqslant 1$, $x \in E_l$, *причем для некоторых постоянных* $C > 0$, $\theta > 0$, $\nu > 0$

$$\mathsf{M}\,|G(t, x, \omega) - G(t, x_0, \omega)|^2 \leqslant C\,|x - x_0|^\nu \quad \text{при } |x - x_0| < \theta \quad (6.10)$$

и, кроме того,

$$\lim_{t\to\infty} A(t, x_0) = S_0, \tag{6.11}$$

4) *выполнено соотношение*

$$\lim_{R\to\infty} \sup_{t\geqslant 1} \int\limits_{|G(t, x_0, \omega)|>R} |G(t, x_0, \omega)|^2 \mathsf{P}\{d\omega\} = 0. \tag{6.12}$$

Тогда

$$\sqrt{t}\,(X^x(t) - x_0) - Z_0(t) \to 0 \quad \textit{при} \quad t \to \infty$$

почти наверное, если $\mu > 0$, *и по вероятности, если* $\mu = 0$, *где последовательность*

$$Z_0(t+1) = a \sum_{k=1}^{t} \frac{A_{kt}}{\sqrt{k}} G(k+1, x_0, \omega) \tag{6.13}$$

асимптотически нормальна с параметрами $(0, S)$.

Доказательство. Не ограничивая общности, можно считать $x_0 = 0$. Рассмотрим, как и при доказательстве теоремы 6.1, процесс $\bar{X}^{s,\zeta}(t)$, определяемый формулой (6.4), где функции $\bar{R}(x)$, $\bar{G}(t, x, \omega)$ удовлетворяют условиям 1, 2′ § 2. Представим, далее, процесс $\bar{Y}(t) = \sqrt{t}\bar{X}^{s,\zeta}(t)$ в виде

$$\bar{Y}(t+1) = A_{s-1t}\sqrt{s}\,\zeta + \sum_{k=s}^{t} \frac{A_{kt}}{\sqrt{k}} C(k)\,\bar{X}^{s,\zeta}(k) +$$

$$+ \sum_{k=s}^{t} \frac{A_{kt}}{\sqrt{k}} \sqrt{1 + \frac{1}{k}}\,\hat{\delta}(\hat{X}^{s,\zeta}(k)) +$$

$$+ a \sum_{k=s}^{t} \frac{A_{kt}}{\sqrt{k}} \sqrt{1 + \frac{1}{k}}\,[\hat{G}(k+1, \hat{X}^{s,\zeta}(k), \omega) -$$

$$- \hat{G}(k+1, 0, \omega)] + Z_0(t+1),$$

где $\bar{\delta}(x) = \bar{R}(x) - Bx$.

Первые два слагаемых стремятся к нулю п. н. при $t \to \infty$. Это вытекает из оценки (3.12) и результата задачи 4.1. Кроме того, в силу леммы 4.3 п. н. (если $\mu > 0$)

или по вероятности (если $\mu = 0$) справедливо равенство

$$\lim_{t\to\infty} \sum_{k=s}^{t} \frac{A_{kt}}{\sqrt{k}} \sqrt{1+\frac{1}{k}}\,\hat{\delta}(\hat{X}^{s,\zeta}(k)) = 0, \tag{6.14}$$

а из (6.10) и леммы 4.4 имеем

$$\lim_{t\to\infty} \sum_{k=s}^{t} \frac{A_{kt}}{\sqrt{k}} \sqrt{1+\frac{1}{k}}\,[\hat{G}(k+1,\ \hat{X}^{s,\zeta}(k),\ \omega) - \hat{G}(k+1,\ 0,\ \omega)] = 0 \quad (\text{п. н.}).$$

Далее, нетрудно установить, что

$$Z_0(t) \sim \mathfrak{N}(0,\ S).$$

Для этого достаточно, пользуясь (6.11), (6.12), проверить справедливость условий (1.10), (1.11) теоремы 1.1 при

$$\xi_{tk} = \frac{A_{kt}}{\sqrt{k}} \sqrt{1+\frac{1}{k}}\, G(k+1,\ 0,\ \omega).$$

(Равенство (1.9) будет при этом выполнено, так как случайные величины $G(k,\ 0,\ \omega)$, $k = 1, 2, \ldots$, независимы в совокупности.) Такая проверка в более сложной ситуации уже была проведена при доказательстве теоремы 6.1.

Из приведенных соображений вытекает справедливость леммы для процесса $\bar{X}^{s,\zeta}(t)$. Теперь осталось почти дословно повторить проведенные в заключении доказательства теоремы 5.3 рассуждения.

Идейную близость леммы 6.1 к теореме 5.3 подчеркивает следующая

Теорема 6.3. *Пусть выполнены условия леммы* 6.1, k, $n_1, \ldots, n_k$ — *положительные целые числа, причем* $n < n_1 < n_2 < \ldots < n_k$ *таковы, что*

$$\lim_{n\to\infty} \ln \frac{n_k}{n} = t_k.$$

Тогда распределение случайного вектора

$$\left(\sqrt{n_1}\,(X^x(n_1) - x_0),\ \ldots,\ \sqrt{n_k}\,(X^x(n_k) - x_0)\right)$$

сходится при $n \to \infty$ *к распределению вектора* $(Z(t_1), \ldots$ $\ldots, Z(t_k))$, *где* $Z(t)$ — *стационарный гауссовский марковский процесс, удовлетворяющий стохастическому* *уравнению*

$$dZ = AZ\,dt + a\sigma^{(0)}\,d\tilde{\xi}(v).$$

Здесь $\tilde{\xi}(v) = (\tilde{\xi}_1(v), \ldots, \tilde{\xi}_l(v))^*$ — стандартный винеровский процесс, а матрица с действительными элементами $\sigma^{(0)}$ такова, что $\sigma^{(0)}\sigma^{(0)*} = S_0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно лемме 6.1

$$\sqrt{t}\,(X^x(t) - x_0) - Z_0(t) \to 0$$

по вероятности при $t \to \infty$. Поэтому для доказательства теоремы достаточно убедиться, что конечномерные распределения процесса

$$V_T(s) = Z_0(Te^s),$$

где T, $t = Te^s$ — целые положительные числа, сходятся к конечномерным распределениям процесса $Z(s)$.

Заметим с этой целью, что в силу (6.13) $Z_0(t)$ может быть определен рекуррентно:

$$Z_0(t+1) - Z_0(t) = \frac{A}{t}Z_0(t) + a\frac{\xi(t+1)}{\sqrt{t}}, \quad Z_0(1) = 0, \tag{6.15}$$

где $\xi(t) = G(t, x_0, \omega)$.

Из (6.15) вытекает, что процесс $V_T(s)$ также может быть определен рекуррентно:

$$V_T(s + \Delta_T(s)) - V_T(s) = AV_T(s)\,\Delta_T(s)\,\alpha_T(s) + \\ + a\xi(Te^{s+\Delta_T(s)})\sqrt{\Delta_T(s)\,\alpha_T(s)}, \quad V_T(0) = Z_0(T), \tag{6.16}$$

где

$$\Delta_T(s) = \ln\left(1 + \frac{e^{-s}}{T}\right), \quad \alpha_T(s) = \frac{(e^sT)^{-1}}{\ln(1 + (Te^s)^{-1})}.$$

Последние равенства приводят при $T \to \infty$ к соотношениям

$$\sup_{s \geqslant 0}|\alpha_T(s) - 1| \to 0, \quad \sup_{s \geqslant 0}\Delta_T(s) \to 0.$$

Из (6.16) легко получим также равенства

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{\Delta_T(s)}\mathsf{M}(V_T(s + \Delta_T(s)) - v / V_T(s) = v) = Av,$$

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{\Delta_T(s)}\mathsf{M}((V_T(s + \Delta_T(s)) - v - Av\Delta_T(s))(V_T(s + \Delta_T(s)) - \\ - v - Av\Delta_T(s))^* / V_T(s) = v) = a^2S_0.$$

Кроме того, из теоремы 6.3 вытекает сходимость распределения $V_T(0) = Z_0(T)$ при $T \to \infty$ к распределению гауссовского случайного вектора с нулевым средним и корреляционной матрицей S.

Эти обстоятельства дают основание ожидать (см. наводящие соображения в § 2.4), что конечномерные распределения процесса $\tilde{V}_T(s)$, представляющего собой случайную ломаную, которая совпадает с $V_T(s)$ во всех точках, где последний процесс определен (рис. 5), сходятся к конечномерным распределениям процесса $Z(t)$.

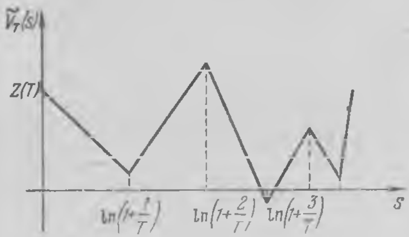

Рис. 5.

То, что в условиях теоремы 6.3 это действительно так, показывают известные результаты о сходимости последовательности цепей Маркова к марковскому процессу, определяемому стохастическим уравнением (см. Скороход [1], Гихман и Скороход [1]). Теорема доказана.

Замечание 6.2. Теоремы 6.1, 6.2, 6.3 остаются справедливыми и в случае, когда последовательность $a(t)$, входящая в рекуррентное соотношение, определяющее процесс с. а., имеет при $t \to \infty$ вид $a(t) = a/t + o(1/t^{1+\varepsilon})$, где $\varepsilon > 0$.

§ 7. Сходимость моментов

Выше, в § 2, было показано, что случайный процесс $Y(t) = \sqrt{t}\,(X^x(t) - x_0)$ имеет ограниченные моменты до второго порядка, если выполнены условия 1 и 2 этого параграфа. Здесь мы установим ограниченность этих и более высоких моментов процесса $Y(t)$ при более общих предположениях. Это позволит доказать также, что моменты процесса $Y(t)$ сходятся к соответствующим моментам нормального закона с параметрами $(0, S)$.

Нам будет достаточно предположить, в частности, что условие 1 § 2 выполнено с произвольным $\lambda > 0$ (не обязательно удовлетворяющим условию $2a\lambda > 1$). Таким образом, в дальнейшем предполагается, что выполнено следующее

Условие (α). Существуют симметричная, положительно определенная матрица C и число $\lambda > 0$ такие, что при всех x

$$(CR(x),\ x - x_0) \leqslant -\lambda(C(x - x_0),\ x - x_0). \quad (7.1)$$

Как и всюду в этой главе, сначала будет рассмотрена непрерывная процедура РМ.

Лемма 7.1. *Пусть выполнено условие* (α) *и при всех* $t \geqslant 1$, $x \in E_l$ *условие*

$$|R(x)| + \sum_{r=1}^{k} |\sigma_r(t,\ x)| \leqslant K(1 + |x|), \qquad K = \text{const}. \quad (7.2)$$

Тогда решение $X^x(t)$ *уравнения*

$$dX(t) = \frac{a}{t}\left[R(X(t))\,dt + \sum_{r=1}^{k} \sigma_r(t,\ X(t))\,d\xi_r(t)\right], \quad X(1) = x, \quad (7.3)$$

удовлетворяет при всех $n = 1, 2, \ldots$ *соотношению*

$$\sup_{t \geqslant 1} \mathsf{M}\,[\,|X^x(t) - x_0|\,t^{\varepsilon}\,]^{2n} = C_n < \infty, \quad (7.4)$$

где $\varepsilon = \min\left[\frac{a\lambda}{2},\ \frac{1}{2}\right]$.

Доказательство. Будем считать $x_0 = 0$. Положим $V_n(x) = (Cx,\ x)^n$. Тогда, если L — производящий дифференциальный оператор процесса $X^x(t)$, то

$$LV_n(x) = \frac{2na\,(Cx,\ x)^{n-1}(CR(x),\ x)}{t} + \frac{a^2}{2t^2}\sum_{r=1}^{k}\left(\sigma_r(t,\ x),\ \frac{\partial}{\partial x}\right)^2 V_n. \quad (7.5)$$

Вторые производные функции $V_n(x)$ являются однородными формами порядка $2n - 2$, поэтому

$$\left|\frac{\partial^2 V}{\partial x_i\,\partial x_j}\right| < k_1 |x|^{2n-2}. \quad (7.6)$$

Кроме того, коэффициент $\sigma_r(t,\ x)$ удовлетворяют условию (7.2). Отсюда, из (7.1), (7.5), (7.6) и справедливого при $x \in E_l$ неравенства

$$|x|^{2n-2} < k_2 V_{n-1}(x) \tag{7.7}$$

получаем

$$LV_n(x) \leqslant -\frac{2na\lambda}{t} V_n(x) + \frac{k_3}{t^2}(V_n(x) + V_{n-1}(x)). \tag{7.8}$$

Таким образом, при $t > T_n$ справедливо неравенство

$$LV_n(x) \leqslant -\frac{na\lambda}{t} V_n(x) + \frac{k_3}{t^2} V_{n-1}(x). \tag{7.9}$$

При $n = 1$ неравенство (7.9) совпадает с (2.5), а потому (см. (2.6)) утверждение леммы для этого случая справедливо. Для произвольного n это утверждение вытекает из принципа математической индукции, если заметить, что в силу задачи 3.7.1 и (7.2) для функции $V_n(x)$ справедлива формула (3.5.5) а, следовательно, и равенство

$$\frac{d}{dt} \mathsf{M} V_n(X^x(t)) = \mathsf{M} LV_n(X^x(t)).$$

Лемма 7.2. *Пусть функция $R(x)$ удовлетворяет условию (1.1), причем матрица $A = aB + {}^1/_2 J$ устойчива. Пусть, кроме того, выполнены условия (α) и (7.2). Тогда для решения $X^x(t)$ задачи (7.3) при любом $n = 1, 2, \ldots$ выполнено соотношение*

$$\sup_{t \geqslant 1} \mathsf{M} |(X^x(t) - x_0)\sqrt{t}|^{2n} = d_n < \infty. \tag{7.10}$$

Доказательство. Как всегда, можно ограничиться случаем $x_0 = 0$. Так как матрица $A = aB + {}^1/_2 J$ устойчива и выполнено условие (1.1), то (см. следствие 3.1) найдутся симметричная положительно определенная матрица C_1, $\theta > 0$ и $\lambda_1 > \frac{1}{2} a$, для которых

$$(C_1 R(x), x) < -\lambda_1 (C_1 x, x) \quad \text{при } |x| < \theta. \tag{7.11}$$

Рассматривая функцию $W_n(x) = (C_1 x, x)^n$ и принимая во внимание соотношения, аналогичные (7.5) — (7.7), получим неравенство

$$LW_n(x) \leqslant \frac{2na(C_1 x, x)^{n-1}(C_1 R(x), x)}{t} + \\ + \frac{k_1}{t^2}(W_{n-1}(x) + W_n(x)). \tag{7.12}$$

(Здесь и ниже k_i — положительные постоянные, быть может, зависящие от n.) Учитывая (7.11), находим из (7.12) и соотношения $(C_1 R(x), x) \leqslant k_2 (C_1 x, x)$ что,

$$LW_n(x) \leqslant -\frac{2na\lambda_1 W_n(x)}{t} \chi_{\{|x|<\theta\}} + \frac{k_3 W_n(x)}{t} \chi_{\{|x|\geqslant\theta\}} + \\ + \frac{k_1}{t^2}(W_{n-1}(x) + W_n(x)).$$

Отсюда, как обычно (см. доказательство леммы 2.1), получаем

$$\frac{d}{dt} \mathsf{M} W_n(X^x(t)) \leqslant -\frac{qn}{t} \mathsf{M}[W_n(X^x(t)) \chi_{\{|X^x(t)|<\theta\}}] + \\ + \frac{k_3}{t} \mathsf{M}[W_n(X^x(t)) \chi_{\{|X^x(t)|\geqslant\theta\}}] + \\ + \frac{k_1}{t^2} \mathsf{M}(W_{n-1}(X^x(t)) + W_n(X^x(t)),$$

где $q = 2a\lambda_1 > 1$. Значит, в силу тождества

$$\mathsf{M}[W_n(X^x(t)) \chi_{\{|X^x(t)|<\theta\}}] = \\ = \mathsf{M}[W_n(X^x(t)) - W_n(X^x(t)) \chi_{\{|X^x(t)|\geqslant\theta\}}],$$

имеем

$$\frac{d}{dt} \mathsf{M} W_n(X^x(t)) \leqslant \\ \leqslant -\frac{qn}{t} \mathsf{M} W_n(X^x(t)) + \frac{k_4}{t} \mathsf{M}[W_n(X^x(t)) \chi_{\{|X^x(t)|\geqslant\theta\}}] + \\ + \frac{k_1}{t^2} \mathsf{M}(W_{n-1}(X^x(t)) + W_n(X^x(t))).$$

Заметим еще, что из неравенства $\chi_{\{|X^x(t)|\geqslant\theta\}} \leqslant |X^x(t)|^{2N}/\theta^{2N}$, справедливого для любого $N > 0$, вытекает соотношение

$$\mathsf{M}[W_n(X^x(t)) \chi_{\{|X^x(t)|\geqslant\theta\}}] \leqslant k_5 \frac{\mathsf{M} W_{n+N}(X^x(t))}{\theta^{2N}}. \tag{7.13}$$

В силу же леммы 7.1 правая часть (7.13) может быть сделана меньше k_6/t^{n+1} за счет выбора N. Поэтому

$$\frac{d}{dt} \mathsf{M} W_n(X^x(t)) \leqslant -\frac{qn}{t} \mathsf{M} W_n(X^x(t)) + \frac{k_7}{t^{n+1}} + \\ + \frac{k_1}{t^2} \mathsf{M}(W_{n-1}(X^x(t)) + W_n(X^x(t))). \tag{7.14}$$

Если мы предположим теперь, что утверждение леммы справедливо для моментов степени $2(n-1)$, то для $t > T_n$ и некоторой постоянной q_1 $(1 < q_1 < q)$ получаем из (7.14) также неравенство

$$\frac{d\mathsf{M}W_n(X^x(t))}{dt} \leqslant -\frac{q_1 n}{t}\mathsf{M}W_n(X^x(t)) + \frac{k_8}{t^{n+1}}.$$

Преобразуя это неравенство к виду

$$\frac{d}{dt}\left(t^{q_1 n}\mathsf{M}W_n(X(t))\right) \leqslant \frac{k_8}{t^{n+1-q_1 n}}$$

и интегрируя в пределах от T до t, получим в силу соотношения $W_n(x) \geqslant k_9 |x|^{2n}$ утверждение леммы для моментов степени $2n$. Так как для $n = 0$ утверждение леммы очевидно, то лемма доказана.

Сформулируем теперь основной результат этого параграфа для случая непрерывного времени.

Теорема 7.1. *Пусть выполнены условия* (α), (7.2), (1.1), *а матрица* $A = aB + {}^1/_2 J$ *устойчива. Пусть, кроме того, выполнены условия*

$$\lim_{\substack{t\to\infty \\ x\to x_0}} \sigma_r(t, x) = \sigma_r^0,$$

а $X^x(t)$ — *решение задачи* (7.3). *Тогда случайный процесс* $Y(t) = \sqrt{t}\,(X^x(t) - x_0)$ *имеет ограниченные моменты всех порядков* $n = 1, 2, 3 \ldots$ *При этом любые смешанные моменты вектора* $Y(t)$ *сходятся при* $t \to \infty$ *к соответствующим моментам гауссовского случайного вектора* η *с нулевым средним и ковариационной матрицей* S, *где*

$$S = a^2 \int_0^\infty e^{Av} S_0 e^{Av*}\,dv, \qquad S_0 = \sum_{r=1}^k \sigma_r^0 \sigma_r^{0*}.$$

В частности, при $t \to \infty$

$$\mathsf{M}Y(t)\,Y(t)^* \to S.$$

Доказательство. В силу теоремы 4.4.1 $X(t) \to x_0$ при сделанных предположениях. Поэтому выполнены условия теоремы 5.1, которая позволяет заключить, что $Y(t)$ сходится к η по распределению. Отсюда, из леммы 7.2 и леммы 1.2.1 следует утверждение теоремы.

Аналогичный результат можно получить и для дискретной процедуры

$$X(t+1)-X(t)=\frac{a}{t}\left[R(X(t))+G(t+1,\ X(t),\ \omega)\right],\qquad X(1)=x. \tag{7.15}$$

Однако по сравнению с непрерывным временем здесь возникают две дополнительных трудности: во-первых, выражение для производящего оператора степени квадратичной формы в этом случае не так просто, а, во-вторых, для ограниченности моментов процесса $Y(t) = \sqrt{t}\,(X^x(t) - x_0)$ здесь уже нужно требовать и существования достаточно высоких моментов у величин $G(t, x, \omega)$. В связи с последним обстоятельством мы будем предполагать, что при подходящем β для всех $x \in E_l$, $t \geqslant 1$ выполнено условие

$$|R(x)|^{\beta} + \mathbf{M}\,|G(t,\ x,\ \omega)|^{\beta} \leqslant K(1 + |x|^{\beta}). \tag{7.16}$$

З а д а ч а 7.1. Пусть выполнены условия (7.16) с $\beta = 2n$ и (7.1). Покажите, что в этом случае для решения задачи (7.15) при $k = 1, 2, \ldots, n$ выполнены соотношения

$$\sup_{t\geqslant 1} \mathbf{M}\left[\,|X^x(t)-x_0|\,t^{\varepsilon}\right]^{2k}=C_k<\infty, \tag{7.17}$$

где $\varepsilon=\min(a\lambda,\ 1/2)$.

У к а з а н и е. Воспользоваться методом доказательства леммы 2.1 и провести индукцию по k.

З а д а ч а 7.2. а) Пусть выполнено условие (7.1) и условие (7.16) для четного числа β, удовлетворяющего неравенству

$$\beta \geqslant \frac{2}{\min(2a\lambda,\ 1)}. \tag{7.18}$$

Покажите, что тогда процесс $Y(t) = \sqrt{t}\,(X^x(t) - x_0)$, где $X^x(t)$ — решение задачи (7.15), имеет ограниченные моменты второго порядка.

б) Проверьте, что при замене условия (7.18) условием

$$\beta \geqslant \frac{4}{\min(2a\lambda,\ 1)}$$

можно гарантировать справедливость соотношения

$$\sup_{t \geqslant 1} \mathsf{M} \mid Y(t) \mid^4 < \infty.$$

Указание. Воспользуйтесь результатом задачи 7.1 и методом доказательства леммы 7.2.

Из ограниченности моментов порядка, большего n_0, и сходимости распределений вытекает согласно лемме 1.2.1 и сходимость моментов порядка n_0. Таким образом, мы получаем следующую теорему.

Теорема 7.2. *Пусть выполнены условия* (α), (1.1), *матрица* $A = aB + {}^1/_2 J$ *устойчива и*

$$\lim_{\substack{t \to \infty \\ x \to x_0}} A(t, x) = A(\infty, x_0) = S_0,$$

где

$$A(t, x) = \mathsf{M} G(t, x, \omega) G^*(t, x, \omega).$$

Пусть η — *гауссовский случайный вектор с параметрами* $(0, S)$. *Пусть, кроме того, справедливо неравенство* (7.16) *при четном* $\beta \geqslant \frac{2}{\min(2a\lambda, 1)}$. *Тогда моменты порядков меньших чем два процесса* $Y(t) = \sqrt{t}(X^x(t) - x_0)$ ($X^x(t)$ — *решение задачи* (7.15)) *сходятся к соответствующим моментам вектора* η. *В частности,*

$$\mathsf{M} Y(t) \xrightarrow[t \to \infty]{} 0.$$

Если же неравенство (7.16) *выполнено при четном* $\beta \geqslant \frac{4}{\min(2a\lambda, 1)}$, *то все моменты порядков, меньших* 4, *процесса* $Y(t)$ *сходятся к соответствующим моментам* η *и, в частности,*

$$\mathsf{M} Y(t) Y^*(t) \xrightarrow[t \to \infty]{} S = a^2 \int_0^\infty e^{Av} S_0 e^{A^* v}\, dv.$$

ГЛАВА 7

НЕКОТОРЫЕ МОДИФИКАЦИИ ПРОЦЕДУР СТОХАСТИЧЕСКОЙ АППРОКСИМАЦИИ

Рассматриваются модификации процедуры РМ, обобщающие модификацию, предложенную Албертом и Гарднером. Выясняются условия сходимости и асимптотической нормальности этих модификаций. Изучены также свойства важной модификации процедуры РМ, предложенной Вентером, и некоторых аналогичных процедур.

§ 1. Постановка задачи

В ряде случаев a priori известно, что корень уравнения регрессии $R(x) = 0$ принадлежит некоторому открытому ограниченному множеству $U \subset E_1$. Тогда естественно построить процедуры, использующие лишь наблюдения неизвестной функции $R(x)$ на этом множестве. К тому же, по условиям эксперимента, наблюдения вне U могут оказаться и невозможными.

Последовательная процедура, приспособленная к такого рода априорной информации, изучена в книге Алберта и Гарднера [1] в связи с задачей оценивания неизвестного параметра распределения. Она состоит в следующем. Обозначим для любого $x \in E_1$

$$[x]_{r_1}^{r_2} = \begin{cases} x, & \text{если} \quad r_1 < x < r_2, \\ r_1, & \text{если} \quad x < r_1, \\ r_2, & \text{если} \quad x > r_2. \end{cases}$$

Тогда модификацией Алберта и Гарднера процедуры с. а. Роббинса — Монро (4.1.5) служит процедура

$$X(t+1) = [X(t) + a(t)(R(X(t)) + G(t+1, X(t), \omega)]_{r_1}^{r_2}. \quad (1.1)$$

В этой же книге доказана при некоторых условиях сходимость процедуры (1.1) и более общей процедуры, когда множитель $a(t)$ зависит от прошлых наблюдений. Кроме того, там изучено предельное распределение процедуры (1.1) и поставлена задача об изучении свойств ее многомерного аналога.

Здесь мы рассмотрим некоторый класс обобщающих (1.1) процедур с. а. и исследуем их асимптотические свойства.

В соответствии со сказанным всюду в этом и следующих параграфах предполагается, что уравнение $R(x) = 0$ имеет единственное решение $x = x_0$ на фиксированном множестве U, а функции $R(x)$, $\mathsf{M}\,|\,G(t, x, \omega)\,|^2$ ограничены при $t \geqslant 1$, $x \in \widetilde{U}$ ($\widetilde{U}$ — замыкание U), удовлетворяют обычным условиям измеримости, причем $\mathsf{M}G(t, x, \omega) = 0$.

Всюду в дальнейшем через $\bar{X}(t)$ будет обозначаться процесс, полученный из $X(t)$ с помощью некоторой операции усечения, более подробно описанной ниже.

Рассмотрим класс процедур, обобщающих (1.1), которые строятся по наблюдениям из множества U.

Пусть $\Phi(x)$ — $\mathfrak{B}_l$-измеримая функция, $x \in E_l$, такая, что $\Phi(x) = x$ при $x \in U$, $\Phi(x) \in U$ при любом $x \in E_l$. Тогда процедура

$$\bar{X}(t+1) = \Phi(\bar{Y}(t)), \tag{1.2}$$

где

$$\bar{Y}(t) = \bar{X}(t) + a(t)\,(R(\bar{X}(t)) + G(t+1, \bar{X}(t), \omega))$$

(R, G — векторы из E_l, $R(x) + G(t+1, x, \omega)$ удовлетворяет условиям (А) § 2.3), конечно, обобщает (1.1).

В этой процедуре $\bar{X}(t+1)$ определяется по $\bar{X}(t)$ так же, как и в процедуре Роббинса — Монро (см. гл. 4), если точка $\bar{Y}(t)$ принадлежит множеству U. Если же $\bar{Y}(t) \bar{\in} U$, то следующее наблюдение производится в точке $\bar{X}(t+1) = \Phi(\bar{Y}(t)) \in U$.

Дальнейшее обобщение состоит в том, что в последнем случае $\bar{X}(t+1)$ строится по $\bar{Y}(t)$ не обязательно детерминированным образом, а, быть может, в соответствии с некоторым распределением вероятностей, сосредоточенном на U и не зависящим от прошлых наблюдений процесса $X(t)$. Точнее, рассмотрим в E_l процедуру

$$X(t+1)=\Phi(Y(t),\ \omega), \tag{1.3}$$

где семейство $\mathfrak{B}_l \times \mathfrak{A}$ измеримых функций $\Phi(x,\ \omega)$, $x \in E_l$, не зависит от семейства $G(t,\ x,\ \omega)$, $t=1,\ 2,\ \ldots$ $\ldots,\ x \in E_l$, причем

$$\mathsf{P}\,\{\Phi(x,\ \omega)=x \quad \text{при } x \in U\}=1, \tag{1.4}$$

$$\mathsf{P}\,\{\Phi(x,\ \omega) \in U \text{ при } x \in E_l\}=1. \tag{1.5}$$

Процедуру (1.3) будем называть *усеченной* в области U процедурой РМ. Будем обозначать $X^{s,\ x}(t)$ процесс, определяемой формулой (1.3) и начальным условием $X(s)=x$.

§ 2. Общая теорема

В этом параграфе мы будем рассматривать усеченную в области $U \subset E_l$ процедуру с. а., определяемую формулой (1.3), где последовательность $a(t) \geqslant 0$ удовлетворяет условиям

$$\sum_{t=1}^{\infty} a(t)=\infty, \qquad \sum_{t=1}^{\infty} a^2(t)<\infty. \tag{2.1}$$

Пусть, кроме того, существует функция $W(x) \in C_2^0$ такая [1]), что

$$\begin{gathered}\sup_{\varepsilon<|x-x_0|,\ x \in \bar{U}} (R(x),\ \nabla W(x))<0 \quad \text{при} \quad \varepsilon>0,\\ W(x)>0 \quad \text{при} \quad x \neq x_0,\ W(x_0)=0.\end{gathered} \tag{2.2}$$

Обозначим

$$\tau_1^{s,\ x}=\inf\{t:\ Y^{s,\ x}(t-1) \bar{\in} U\},$$

$$Y^{s,\ x}(t)=X^{s,\ x}(t)+a(t)\,(R(X^{s,\ x}(t))+G(t+1,\ X^{s,\ x}(t),\ \omega)).$$

Очевидно, $\tau_1^{s,\ x}$ — момент первого выхода неусеченного процесса РМ

$$\begin{gathered}X(t+1)-X(t)=a(t)\,(R(X(t))+G(t+1,\ X(t),\ \omega)),\\ X(s)=x\end{gathered} \tag{2.3}$$

---

[1]) Класс C_2^0 введен на стр. 122.

из области U. Обозначим также для области $U_1 \subset U$

$$\zeta_1^{s,x}(U_1) = \inf\{t: t \geqslant \tau_1^{s,x}, \tilde{X}^{s,x}(t) \in U_1\}.$$

Аналогично, положим (при $n = 2, 3, \ldots$)

$$\tau_n^{s,x} = \inf\{t: \tilde{Y}^{s,x}(t-1) \overline{\in} \tilde{U},\ t > \zeta_{n-1}^{s,x}(U_1)\},$$

$$\zeta_n^{s,x}(U_1) = \inf\{t: t \geqslant \tau_n^{s,x},\ \tilde{X}^{s,x}(t) \in U_1\}.$$

Конечно, возможно, что $\tau_{n_0}^{s,x} = \infty$ с положительной вероятностью для некоторого n_0. Тогда $\tau_n^{s,x} = \zeta_n^{s,x}(U_1) = \infty$ и для всех $n > n_0$ с той же вероятностью.

Теорема 2.1. *Пусть усеченная в области U процедура* РМ (1.3) *обладает свойствами:*

I. *Для некоторой области $U_1 \subset U$ такой, что $x_0 \in U_1$, и некоторого $T > 0$ справедливо неравенство*

$$\sup_{s \geqslant T,\ x \in U_1} \mathsf{P}\{\tau_1^{s,x} < \infty\} = q < 1. \tag{2.4}$$

II. *Для всех $s \geqslant T$, $x \in U$*

$$\mathsf{P}\ \{\tau^{s,x}(U_1) < \infty\} = 1,$$

где $\tau^{s,x}(U_1)$ — момент первого достижения множества U_1 процессом $\tilde{X}^{s,x}(t)$.

III. *Существует функция $W(x) \in C_2^0$, удовлетворяющая в области U условиям* (2.2).

IV. *Выполнены условия* (2.1).

Тогда для любых $s \geqslant 1$, $x \in E_l$ процесс с. а. $\tilde{X}^{s,x}(t)$ удовлетворяет соотношению

$$\mathsf{P}\{\lim_{t\to\infty} \tilde{X}^{s,x}(t) = x_0\} = 1.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1) Как обычно, рассмотрим в области $t \geqslant 1$, $x \in \bar{U}$ вспомогательную функцию

$$V(t, x) = W(x) + K \sum_{i=t}^{\infty} a^2(i).$$

Обозначим через L производящий оператор неусеченного процесса РМ $X(t)$. Для $t \geqslant 1$, $x \in \tilde{U}$ при достаточно большой постоянной K, используя ограниченность в $\tilde{U}$ функций $R(x)$, $\mathsf{M}\ |G(t, x, \omega)|^2$ и условие $W(x) \in C_2^0$, имеем

$$LV(t, x) = \mathsf{M}W(x + a(t)(R(x) + G(t+1, x, \omega))) - \\ - W(x) - Ka^2(t) \leqslant -a(t)\,|\,(R(x), \nabla W(x))\,|. \quad (2.5)$$

Значит, на основании теоремы 2.2.1 пара $(V(t \wedge \tau_1^{s,x}, X^{s,x}(t \wedge \tau_1^{s,x})), \mathcal{N}_t)$ — супермартингал. Отсюда и из теоремы 1.5.1 вытекает, что для почти всех $\omega \in \bar{A}_1^{s,x} = \{\omega: \tau_1^{s,x} = \infty\}$ существует конечный предел

$$\lim_{t\to\infty} V(t, X^{s,x}(t)) = \eta < \infty. \quad (2.6)$$

Из (2.6), (2.5) с помощью соображений, использованных при доказательстве теоремы 2.7.1, находим:

$$\lim_{t\to\infty} X^{s,x}(t) = x_0 \quad \text{для почти всех} \quad \omega \in \bar{A}_1^{s,x}. \quad (2.7)$$

Так как $\hat{X}^{s,x}(t) = X^{s,x}(t)$ при $t < \tau_1^{s,x}$, то (2.7) справедливо и для процесса $\hat{X}^{s,x}(t)$, т. е.

$$\lim_{t\to\infty} \hat{X}^{s,x}(t) = x_0 \quad \text{для почти всех} \quad \omega \in \bar{A}_1^{s,x}. \quad (2.8)$$

2) В силу условия II теоремы с точностью до события вероятности нуль справедливо включение

$$\{\tau_n^{s,x} < \infty\} \subset \{\zeta_n^{s,x}(U_1) < \infty\}. \quad (2.9)$$

Оценим вероятность события $A_n^{s,x} = \{\tau_n^{s,x} < \infty\}$ для $x \in U_1$. В силу условия I, для всех $s \geqslant T$, $x \in U_1$

$$\mathsf{P}\{A_1^{s,x}\} \leqslant q. \quad (2.10)$$

Далее, пользуясь марковским свойством процесса $\hat{X}^{s,x}(t)$, (2.9), (2.10), имеем

$$\mathsf{P}\{A_2^{s,x}\} = \\ = \sum_{i=s+1}^{\infty} \sum_{j=s+1}^{\infty} \int_{y \in U_1} \mathsf{P}\{\tau_1^{s,x} = i, \zeta_1^{s,x}(U_1) = j, \hat{X}^{s,x}(j) \in dy\} \times \\ \times \mathsf{P}\{A_1^{j,y}\} \leqslant q\mathsf{P}\{\tau_1^{s,x} < \infty\} \leqslant q^2.$$

Аналогично

$$\mathsf{P}\{A_n^{s,x}\} \leqslant q^n. \quad (2.11)$$

Из (2.11) вытекает, конечно, для всех $s \geqslant T$, $x \in U_1$ равенство

$$\mathsf{P}\left\{\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n^{s,x}\right\} = 0. \tag{2.12}$$

3) Обозначим $B = \{\omega: \overline{\lim\limits_{t\to\infty}} \, | X^{s,x}(t) - x_0 | \neq 0\}$. Очевидно, в силу (2.9), что с точностью до события вероятности нуль справедливо включение

$$B \subset D \cup E \cup F,$$

где

$$D = \{\bar{A}_1^{s,x} \cap B\}, \quad E = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n^{s,x} \cap \bar{A}_{n+1}^{s,x} \cap B) \quad F = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n^{s,x}.$$

Нужно показать, что каждое из событий D, E, F имеет вероятность нуль. Равенство нулю вероятностей $\mathsf{P}\{D\}$, $\mathsf{P}\{F\}$ вытекает соответственно из (2.8), (2.12). Кроме того,

$$\mathsf{P}\{E\} \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{P}\{A_n^{s,x} \cap \bar{A}_{n+1}^{s,x} \cap B\}, \tag{2.13}$$

причем, как это следует из марковского свойства процесса $X^{s,x}(t)$, (2.8), (2.9),

$$\mathsf{P}\{A_1^{s,x} \cap \bar{A}_2^{s,x} \cap B\} = \sum_{i=s+1}^{\infty} \sum_{j=s+1}^{\infty} \int_{y \in U_1} \mathsf{P}\{\tau_1^{s,x} = i,$$

$$\zeta_1^{s,x}(U_1) = j, X^{s,x}(j) \in dy\} \mathsf{P}\{\bar{A}_1^{j,y} \cap B\} = 0.$$

Аналогично убеждаемся и в равенстве нулю остальных членов ряда в (2.13).

4) Таким образом, утверждение теоремы доказано для $x \in U_1$, $s \geqslant T$. Если теперь $s \geqslant 1$, $x \in U$, то, снова применяя марковское свойство и условие II теоремы, без труда получим утверждение теоремы и в общем случае.

Обсудим кратко условия теоремы 2.1. Условия III и IV обычны для метода с. а. и мало ограничительны. Поэтому основное внимание ниже будет обращено на условия I, II. Мы покажем в § 3, что область U_1 всегда можно выбрать так, чтобы условие I выполнялось. Условие же II накладывает некоторые ограничения на класс возможных усечений. Эффективная форма такого ограничения также будет получена в следующем параграфе.

§ 3. Вспомогательные результаты

Лемма 3.1. Для выполнения условия (2.4) *достаточно существования в* E_l *функции* $V(t, x)$ *со свойствами*

$$1)\qquad \begin{gathered} V(t, x) \geqslant 0, \quad t \geqslant T,\ x \in E_l, \\ LV(t, x) \leqslant 0, \qquad t \geqslant T,\ x \in \widetilde{U}, \end{gathered} \tag{3.1}$$

$$2)\qquad \frac{\sup\limits_{t\geqslant T,\ x\in U_1} V(t, x)}{\inf\limits_{t\geqslant T,\ x\in U} V(t, x)} = q < 1. \tag{3.2}$$

Доказательство. Пусть $s \geqslant T$, $x \in U_1$. Так как $(V(t \wedge \tau_1^{s,x}, X^{s,x}(t \wedge \tau_1^{s,x})), \mathcal{N}_t)$ — супермартингал, то

$$\mathsf{M} V(t \wedge \tau_1^{s,x}, X^{s,x}(t \wedge \tau_1^{s,x})) \leqslant V(s, x)$$

при $t \geqslant s \geqslant 1$ и, значит,

$$\int\limits_{\tau_1^{s,x} < t} V(\tau_1^{s,x}, X^{s,x}(\tau_1^{s,x}))\, \mathsf{P}\{d\omega\} \leqslant V(s, x).$$

Отсюда вытекает неравенство

$$\mathsf{P}\{\tau_1^{s,x} < t\} \leqslant \frac{V(s, x)}{\inf\limits_{t\geqslant T,\ x\in U} V(t, x)}. \tag{3.3}$$

Соотношение (2.4) является очевидным следствием (3.2) и (3.3).

Следствие. Рассмотрим, как и при доказательстве теоремы 2.1, функцию

$$V(t, x) = W(x) + K \sum_{i=t}^{\infty} a^2(i), \tag{3.4}$$

где $W(x) \in C_2^0$ удовлетворяет условиям (2.2). Тогда при соответствующем выборе K справедливы, как было указано, неравенства (3.1). Кроме того, выбирая в качестве области U_1 достаточно малую окрестность точки x_0, легко убеждаемся, что для такой области U_1 и достаточно большого T выполнено и условие[1]) (3.2). Таким образом, условия III, IV теоремы 2.1 обеспечивают и выполнение условия I для достаточно малой окрестности точки x_0.

Несколько сложнее обстоит дело с условием II теоремы 2.1. Обозначим L производящий оператор процесса (1.3). Из теоремы 2.5.1 вытекает, что условие II выполнено, если в области $\bar{U} \setminus U_1$ существует неотрицательная функция $V(t, x)$, для которой

$$LV(t, x) \leqslant -\alpha(t) \tag{3.5}$$

при $t \geqslant T$, $x \in \bar{U} \setminus U_1$, где $\alpha(t)$ — член расходящегося ряда из неотрицательных чисел. Это условие, налагающее определенные требования на способ усечения в (1.3), кажется на первый взгляд трудно проверяемым. Однако мы сейчас получим из него следующее утверждение.

Лемма 3.2 *В одномерном случае, когда* $U = (r_1, r_2)$, *условие* II *вытекает из условий* III, IV *для любой усеченной процедуры* (1.3), *удовлетворяющей требованиям* (1.4), (1.5).

Доказательство. Рассмотрим функцию $W(x) \in C_2^0$, равную нулю при $x = x_0$, убывающую при $x < x_0$, возрастающую при $x > x_0$ и, кроме того, такую, что $W(r_1) = W(r_2)$, $W' \neq 0$ при $x \neq x_0$. Определим, далее, функцию $V(t, x)$ формулой (3.4). Тогда, как показывают вычисления, проведенные при доказательстве теоремы 2.1,

$$LV(t, x) \leqslant -a(t) \mid R(x) W'(x) \mid$$

в области $t \geqslant 1$, $x \in \bar{U}$, и, значит, для некоторой постоянной $c > 0$

$$LV(t, x) \leqslant -ca(t) \text{ при } x \in \bar{U} \setminus U_1.$$

Далее, так как $W(x) \geqslant W(y)$ для любых $x \bar{\in} [r_1, r_2]$, $y \in (r_1, r_2)$, то

$$LV(t, x) = \mathsf{M}V(t+1, X^{t,x}(t+1)) - V(t, x) =$$
$$= \mathsf{M}W(X^{t,x}(t+1)) - W(x) - Ka^2(t) \geqslant$$
$$\geqslant \mathsf{M}W(\bar{X}^{t,x}(t+1)) - W(x) - Ka^2(t) = \bar{L}V(t, x).$$

Таким образом, функция $V(t, x)$ удовлетворяет неравенству (3.5). Лемма доказана.

---

[1]) Конечно, не ограничивая общности, можно считать, что для любого $\varepsilon > 0$ $\inf\limits_{|x-x_0| > \varepsilon} W(x) > 0$.

§ 4. Теоремы о сходимости и асимптотической нормальности

Из результатов §§ 2, 3 непосредственно вытекают следующие утверждения.

Теорема 4.1. *Пусть $U=(r_1, r_2)$ — некоторый конечный интервал в E_1, содержащий точку x_0, а $X^{s,x}(t)$ — одномерный марковский случайный процесс, определяющий усеченную в U процедуру (1.3) — (1.5). Пусть, кроме того, выполнены условия*

$$a(t)>0,\quad \sum_{t=1}^{\infty} a(t)=\infty,\quad \sum_{t=1}^{\infty} a^2(t)<\infty, \tag{4.1}$$

$$\sup_{\varepsilon<|x-x_0|,\ x\in[r_1,r_2]} \{R(x)(x-x_0)\}<0 \quad \text{при любом } \varepsilon>0. \tag{4.2}$$

Если к тому же функции $|R(x)|$, $\mathsf{M}G^2(t, x, \omega)$ ограничены при $x\in[r_1, r_2]$, то процесс $X^{s,x}(t)$ для любых $s\geqslant 1$, $x\in E_1$ сходится п. н. при $t\to\infty$ к корню x_0 уравнения регрессии $R(x)=0$.

Теорема 4.2. *Пусть корень x_0 уравнения регрессии $R(x)=0$ принадлежит некоторой ограниченной области $U\in E_l$ и, кроме того,*

1) существует функция $W(x)\in C_2^0$, удовлетворяющая условиям (2.2),

2) для некоторой неотрицательной функции $V_1(t,x)$ и любой окрестности U_1 точки x_0 найдется неотрицательная последовательность $\alpha(t)$ такая, что $\sum\limits_{t=0}^{\infty}\alpha(t)=\infty$ и в области $\widetilde{U}\setminus U_1$

$$\tilde{L}V_1(t, x)\leqslant-\alpha(t), \tag{4.3}$$

3) функции $|R(x)|$, $\mathsf{M}|G(t, x, \omega)|^2$ ограничены при $t\geqslant 1$, $x\in\bar{U}$,

4) выполнены условия (4.1).

Тогда процесс $\tilde{X}^{s,x}(t)$, определяющий усеченную в U процедуру (1.3) — (1.5), п. н. сходится при $t\to\infty$ к корню x_0 уравнения регрессии $R(x)=0$.

З а м е ч а н и е 4.1. Если рассматриваемое усечение таково, что $\tilde{L}W(x)\leqslant LW(x)$, то условие (4.3) выполнено, так как можно положить $V_1(t, x) = W(x) + K \sum_{i=t}^{\infty} a^2(i)$, $\alpha(t) = ca(t)$ (постоянная c зависит от области U_1). [1]

Мы рассмотрели случай усечения по отношению к некоторой ограниченной области U. Все предыдущие рассуждения при тривиальных изменениях остаются в силе и для случая неограниченных областей U. Нужно только наложить на рост функций $|R(x)|$, $\mathsf{M}|G(t, x, \omega)|^2$ такие условия, при которых $X(t)$ не может уйти в бесконечность с положительной вероятностью. Таким образом, можно доказать следующие обобщения теорем 4.1 и 4.2.

Теорема 4.1′. *Пусть x_0 — корень уравнения регрессии $R(x) = 0$, принадлежащий открытому множеству U прямой E_1. Предположим также, что выполнены условия* (4.1), (4.2) *и при $t \geqslant 1$, $x \in U$ неравенство*

$$|R(x)|^2 + \mathsf{M}G^2(t, x, \omega) \leqslant K(1 + x^2), \quad K = \text{const}.$$

Тогда процесс (1.3) — (1.5) *сходится п. н. при $t \to \infty$ к x_0.*

Теорема 4.2′. *Утверждение теоремы* 4.2 *остается в силе и для неограниченной области $U \subset E_l$, если условие* 3) *этой теоремы заменить условием: при $t \geqslant 1$, $x \in U$*

$$|R(x)|^2 + \mathsf{M}|G(t, x, \omega)|^2 \leqslant K(1 + |x|^2), \quad K = \text{const}.$$

Легко видеть, что доказанные в гл. 6 теоремы об асимптотической нормальности почти без изменения переносятся на усеченные процедуры с. а. Чтобы установить это, заметим, что, как показано при доказательстве теоремы 2.1 (см. равенство 2.11), событие: «$\tau_n^{s, x} < \infty$ при всех $n = 1, 2, \ldots$» имеет вероятность нуль. Значит, для любого $\varepsilon > 0$ можно найти такое $T = T(\varepsilon)$, для которого

$$\mathsf{P}\{Y^{s, x}(t) \overline{\in} U \quad \text{для некоторого} \quad t \geqslant T\} \leqslant \varepsilon.$$

Поэтому

$$\mathsf{P}\{X^{s, x}(t) = X_T(t) \text{ при } t \geqslant T\} \geqslant 1 - \varepsilon, \tag{4.4}$$

где $X_T(t)$ — траектория процесса (2.3), удовлетворяющая начальному условию

$$X_T(T) = X^{s, x}(T),$$

[1] Условие $LW \leqslant LW$, конечно, выполнено, если $W(\Phi(x, \omega)) \leqslant W(x)$ п. н.

причем это утверждение справедливо при любом способе определения функций $R(x)$ и $G(t, x, \omega)$ при $x \bar{\in} \bar{U}$. Например, можно положить $R(x) \equiv G(t, x, \omega) \equiv 0$, если $x \bar{\in} \bar{U}$. Если, кроме того, для процесса $X_T(t)$ выполнены условия теоремы 6.6.1, то последовательность случайных величин $\sqrt{t}\,(X_T(t) - x_0)$ асимптотически нормальна. Отсюда и из (4.4) (см. конец доказательства теоремы 6.5.1) вытекает следующий результат.

Теорема 4.3. *Пусть выполнены условия одной из теорем* 4.1, 4.1′, 4.2, 4.2′, *и, кроме того,*

1) $a(t) = a/t$, $a = \text{const} > 0$,

2) *функция* $R(x)$ *допускает представление*

$$R(x) = B(x - x_0) + \delta(x),$$

где

$$|\delta(x)| = o(|x - x_0|) \text{ при } x \to x_0,$$

а матрица $A = aB + \frac{1}{2}J$ *устойчива,*

3) *справедливы соотношения*

$$\lim_{\substack{t\to\infty \\ x\to x_0}} S(t, x) = S_0 = S(\infty, x_0)$$

$$\lim_{R\to\infty} \sup_{|x-x_0|<\theta} \sup_{t\geq 0} \int\limits_{|G(t, x, \omega)|>R} |G(t, x, \omega)|^2 \, \mathsf{P}\{d\omega\} = 0.$$

Тогда

$$\sqrt{t}\,(X^{s, x}(t) - x_0) \sim \mathfrak{N}(0, S),$$

где

$$S = a^2 \int_0^\infty e^{Av} S_0 e^{A^* v}\, dv.$$

В заключение отметим, что для рассмотренной здесь модификации процедуры РМ нетрудно получить и аналоги теорем гл. 6 о сходимости моментов. Мы не будем на этом останавливаться.

§ 5. Адаптивные процедуры Роббинса — Монро

Рассмотрим сначала одномерный случай. Пусть $x \in E_1$, $R(x)$, $G(t, x, \omega)$ — числовые функции, удовлетворяющие при всех $t \geqslant 1$, $x \in E_1$ условиям (А) § 2.3 и соотношениям

$$|R(x)|^2 + \mathsf{M}G^2(t, x, \omega) \leqslant K(1 + x^2), \quad K = \text{const}, \tag{5.1}$$

$$\inf_{\varepsilon < |x - x_0| < \varepsilon^{-1}} R(x)(x - x_0) > 0 \text{ при любом } \varepsilon > 0, \tag{5.2}$$

$$\mathsf{M}G(t, x, \omega) = 0. \tag{5.3}$$

Тогда по теореме 4.1.1 процедура РМ

$$\tilde{X}(t+1) - \tilde{X}(t) = -\frac{1}{a(t+1)} Y_t(\tilde{X}(t), \omega), \quad \tilde{X}(0) = x, \tag{5.4}$$

где $Y_t(x, \omega) = R(x) + G(t + 1, x, \omega)$, $a > 0$, определяет сходящийся к корню x_0 уравнения регрессии $R(x) = \mathsf{M}Y(t, x, \omega) = 0$ случайный процесс $\tilde{X}(t)$. Если к тому же $a/2 < \alpha = R'(x_0)$ и выполнены также условия теоремы 6.6.2, то

$$\sqrt{t}(\tilde{X}(t) - x_0) \sim \mathfrak{N}\left(0, \frac{\sigma_0^2}{a(2\alpha - a)}\right), \tag{5.5}$$

где

$$\sigma_0^2 = \lim_{\substack{t \to \infty \\ x \to x_0}} \mathsf{M}G^2(t, x, \omega).$$

Естественно поставить вопрос об оптимальном выборе параметра a. Если в качестве критерия оптимальности взять дисперсию предельного нормального закона в (5.5), то нужно, конечно, положить $a = \alpha$ (так как при этом значении дисперсия достигает минимального значения σ_0^2/α^2). Но функция регрессии $R(x)$ и, тем более, ее производная при $x = x_0$ не известны наблюдателю. Однако нельзя ли по наблюдениям оценить величину α и построить «адаптивную» процедуру, асимптотически при $t \to \infty$ эквивалентную процедуре (5.4) с $a = \alpha$? Оказывается, можно, при дополнительном предположении $\alpha > 0$.

Нижеследующее изложение существенно использует работу Вентера [1].

Пусть $X(t)$ — любая $\mathscr{F}_t$-измеримая [1]) случайная величина, а $Y_t(X(t) \pm c(t), \omega)$ — независимые наблюдения,

---

[1]) Система σ-алгебр $\mathscr{F}_t$ определена на стр. 48.

произведенные в момент времени t в точках $X(t) \pm c(t)$. (Напомним, что условное распределение $Y_t(X(t) \pm c(t), \omega)$ при фиксированной σ-алгебре $\mathcal{F}_t$ совпадает с распределением $Y(t, X(t) \pm c(t), \omega)$.)

Обозначим

$$Z(t) = \frac{Y_t(X(t)+c(t), \omega) - Y_t(X(t)-c(t), \omega)}{2c(t)}. \tag{5.6}$$

Лемма 5.1. *Пусть выполнены условия:*

1) *Числовая последовательность $c(t)$ в (5.6) стремится к нулю при $t \to \infty$ и, кроме того,*

$$\sum_{t=1}^{\infty} \frac{1}{(tc(t))^2} < \infty. \tag{5.7}$$

2) *Процесс $X(t)$ $\mathcal{F}_t$-измерим и при $t \to \infty$*

$$X(t) \to x_0 \quad \text{(п. н.)}.$$

3) *Функция $R'(x)$ непрерывно дифференцируема в некоторой окрестности точки x_0.*

4) *Функция* $\mathsf{M}G^2(t+1, X(t) \pm c(t), \omega)$ *ограничена при* $t \geqslant 1$.

Тогда при $t \to \infty$

$$W(t) = \frac{1}{t} \sum_{i=1}^{t} Z(i) \to \alpha \quad \text{(п. н)}.$$

Доказательство. Из (5.6) находим

$$W(t) = \frac{1}{t} \sum_{i=1}^{t} \frac{R(X(i)+c(i)) - R(X(i)-c(i))}{2c(i)} + \frac{1}{t} \sum_{i=1}^{t} \zeta(i),$$

где

$$\zeta(i) = \frac{G(i+1, X(i)+c(i), \omega) - G(i+1, X(i)-c(i), \omega)}{2c(i)}.$$

Из условий 1,2, 3 леммы следует, что при $t \to \infty$

$$\frac{R(X(t)+c(t)) - R(X(t)-c(t))}{2c(t)} \to \alpha \quad \text{(п. н.)}.$$

Поэтому достаточно установить соотношение

$$\lim \frac{1}{t} \sum_{i=1}^{t} \zeta(i) = 0 \quad \text{(п. н.)}. \tag{5.8}$$

В силу условия 4 и (5.7)

$$\sum_{t=1}^{\infty} \frac{M\zeta^2(t)}{t^2} < \infty.$$

Кроме того, так как $\mathsf{M}G(t, x, \omega) \equiv 0$, то $\mathsf{M}(\zeta(t)/\mathcal{N}_t) = 0$ (п. н.). Отсюда и из неравенства Колмогорова (см. Лоэв [1], стр. 407, теорема Д) вытекает (5.8), а значит, и утверждение леммы.

Лемма 5.1 позволяет надеяться, что оптимальная в указанном выше смысле процедура с. а. получится, если постоянную a в (5.4) заменить процессом $W(t)$. Кроме того, так как для вычисления $Z(t)$ согласно (5.6) необходимо производить измерения в точках $X(t) + c(t)$ и $X(t) - c(t)$, естественно эти же измерения использовать и в процедуре. Таким образом, мы приходим к необходимости исследования асимптотических свойств процедуры

$$X(t+1) - X(t) = \\ = -\frac{1}{t\tilde{W}(t)} \frac{(Y_t(X(t)+c(t), \omega) + Y_t(X(t)-c(t), \omega))}{2} \qquad (5.9)$$

$$W(t+1) - W(t) = \frac{1}{t+1}(-W(t) + Z(t+1)), \qquad (5.10)$$

где $Z(t)$ — процесс, определенный согласно (5.6), а

$$\tilde{W}(t) = \begin{cases} W(t), & \text{если} \quad W(t) \neq 0 \\ 1, & \text{если} \quad W(t) = 0. \end{cases}$$

(Введение $\tilde{W}(t)$ позволяет придать смысл формуле (5.9) при всех значениях $W(t)$. Ниже будет показано, что при некоторых ограничениях $\tilde{W}(t) \neq W(t)$ не более чем для конечного числа значений t.)

Заметим, что (5.10) является рекуррентной формой записи среднего арифметического значений процесса $Z(t)$, если $W(0) = 0$. Нам, однако, удобно будет рассматривать (5.10) и при других начальных условиях.

Формулы (5.9), (5.10), (5.6) определяют (см. § 2.3) двумерный марковский процесс $(X(t), W(t))$ при любом $\mathcal{F}_s$-измеримом начальном условии. Нетрудно понять, однако, что компонента $X(t)$ этого процесса может и не сходиться к корню x_0 уравнения $R(x) = 0$ даже в том случае, когда $R(x)(x - x_0) > 0$ при $x \neq x_0$. Грубо говоря, причина этого в следующем. Пусть функция $R(x)$ имеет вид, подобный изображенному на рис. 6, причем x_1 и x_2 — точки минимума и максимума функции $R(x)$. Тогда траектория процесса (5.9), (5.10) с положительной вероятностью может оказаться в некоторый момент времени t_0 в области $x > x_2$, $w < 0$. Нетрудно понять из (5.9), что компонента $X(t)$ при этом будет иметь тенденцию движения направо $(\mathsf{M}(X(t+1) - X(t)/X(t), W(t)) > 0)$.

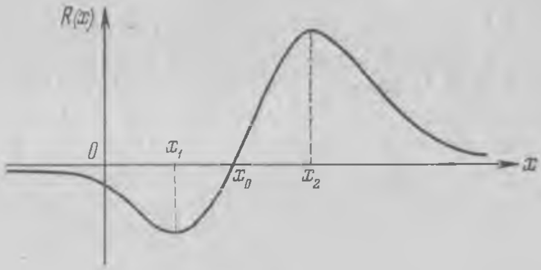

Рис. 6.

В то же время (см. доказательство леммы 5.1) процесс $W(t)$ будет сближаться со средним арифметическим значений $R'(X(t))$, которое отрицательно в силу структуры функции $R(x)$. Таким образом, процесс $(X(t), W(t))$ имеет тенденцию «задержаться» в области $x > x_2$, $w < 0$, а значит, с положительной вероятностью соотношение $X(t) \to x_0$ не будет иметь места.

Приведенные наводящие соображения перестанут действовать, если $R'(x) > 0$ для достаточно больших $|x|$. Мы покажем ниже, что при несколько более ограничительном условии

$$0 < \rho_1 < R'(x) < \rho_2 < \infty, \qquad x \in E_1, \tag{5.11}$$

процедура (5.9), (5.10) дает состоятельную оценку x_0, т. е. $X(t) \to x_0$.

Однако условие (5.11) может оказаться слишком жестким. В ряде случаев может быть доступна лишь следующая априорная информация

$$0 < r_1 < R'(x_0) = \alpha < r_2 < \infty. \tag{5.12}$$

Так как процесс $W(t)$ строился нами выше для аппроксимации величины α, то при наличии информации (5.12) естественно рассмотреть усеченную процедуру, заменив (5.9) формулой

$$X(t+1)-X(t)=$$
$$=-\frac{1}{t[W(t)]}\frac{(Y_t(X(t)+c(t),\omega)+Y_t(X(t)-c(t),\omega))}{2}, \quad (5.13)$$

$$[W(t)]=[W(t)]_{r_1}^{r_2}=\begin{cases} W(t), & \text{если} \quad r_1<W(t)<r_2,\\ r_1, & \text{если} \quad W(t)<r_1,\\ r_2, & \text{если} \quad W(t)>r_2.\end{cases}$$

Теорема 5.1. *Пусть выполнены условия* (5.12) *и*

1) *При $x\in E_1$ справедливо неравенство*

$$R^2(x)+\mathsf{M}G^2(t, x, \omega)\leqslant K(1+x^2), \qquad K=\text{const}. \quad (5.14)$$

2) *Функция $R''(x)$ непрерывна и ограничена при $x\in E_1$.*

3) *Для некоторых ε $(0<\varepsilon<1/2)$, $K_1>0$, $K_2>0$*

$$\frac{K_1}{t^\varepsilon}<c(t)<\frac{K_2}{t^\varepsilon}. \quad (5.15)$$

4) *При всех $x\in E_1$, $x\neq x_0$*

$$R(x)(x-x_0)>0. \quad (5.16)$$

Тогда процедура (5.13), (5.10) *при начальном условии*

$$X(s)=\zeta, \ W(s)=\eta \quad (5.17)$$

(ζ и η — *$\mathscr{F}_s$-измеримые случайные величины с конечной дисперсией*) *обладает при $t\to\infty$ свойствами*

$$X(t)\to x_0 \qquad (\text{п. н.}), \quad (5.18)$$

$$W(t)\to\alpha \qquad (\text{п. н.}). \quad (5.19)$$

Доказательство. Будем считать $x_0=0$. Обозначим L производящий оператор процесса (5.13), (5.10) и вычислим Lx^2. Согласно формуле (2.1.6) находим

$$Lx^2=\mathsf{M}\left(x-\frac{1}{t[w]}\frac{R(x+c(t))+R(x-c(t))}{2}+\frac{G_1(t, x, \omega)}{t[w]}\right)^2-x^2,$$

где обозначено

$$G_1(t+1, x, \omega)=\frac{G(t+1, x+c(t), \omega)+G(t+1, x-c(t), \omega)}{2}.$$

Простое вычисление приводит с помощью (5.14) и справедливого в силу условия 2) теоремы неравенства

$$\left|\frac{R(x+c(t))+R(x-c(t))}{2}-R(x)\right|<K_3c^2(t).$$

к оценке

$$Lx^2\leqslant-\frac{2}{t[w]}xR(x)+\frac{2K_1c^2(t)|x|}{t[w]}+\\+\frac{2K_2(1+x^2+c^2(t))}{t^2[w]^2}+\frac{\mathsf{M}G_1^2(t+1,x,\omega)}{t^2[w]^2}. \tag{5.20}$$

Используя неравенства (5.14), (5.15) и $r_1\leqslant[w]\leqslant r_2$, получим из (5.20)

$$Lx^2\leqslant-\frac{2}{tr_2}xR(x)+K_2\left(\frac{1}{t^2}+\frac{c^2(t)}{t}\right)(1+x^2). \tag{5.21}$$

Так как в силу (5.15) ряд $\sum\limits_{t=1}^{\infty}t^{-1}c^2(t)$ сходится, то из (5.21) первое утверждение теоремы вытекает точно так же, как утверждение теоремы 2.7.1 из неравенства (2.7.3).

Далее, из (5.21) следует (см. доказательство теоремы 2.7.1), что

$$\left(\prod_{u=t}^{\infty}(1+g(u))(1+X^2(t)),\ \mathscr{F}_t\right),$$

где $g(u)=1/t^2+c^2(t)/t$,— супермартингал. Поэтому функция $\mathsf{M}X^2(t)$ ограничена по t. Отсюда и из (5.14) имеем:

$$\sup_{t\geqslant1}\ \mathsf{M}G_1^2(t+1,\ X(t),\ \omega)<\infty.$$

Применяя лемму 5.1, убеждаемся в справедливости и второго утверждения теоремы.

Теорема 5.2. *Пусть справедливы условия* 2—4 *теоремы* 5.1, *неравенства* (5.11) *и, кроме того,*

$$\sup_{t\geqslant1,\ x\in E_1}\mathsf{M}G^2(t,\ x,\ \omega)<\infty.$$

Тогда процедура (5.9), (5.10) *при начальных условиях* $X(1)=x$, $W(0)=0$ *обладает свойствами* (5.18), (5.19).

Доказательство. В ходе доказательства леммы 5.1 были получены соотношения (5.8) и

$$W(t)=\frac{1}{t}\sum_{i=1}^{t}\frac{R(X(i)+c(i))-R(X(i)-c(i))}{2c(i)}+\frac{1}{t}\sum_{i=1}^{t}\zeta(i), \quad (5.22)$$

причем при выводе (5.8) условие $X(t)\to x_0$ п. н. при $t\to\infty$ не использовалось. Поэтому (5.8) можно считать установленным для процесса $W(t)$, определяемого формулами (5.9), (5.10). Значит, согласно (5.11), (5.22)

$$\rho_1\leqslant\varliminf_{t\to\infty}W(t)\leqslant\varlimsup_{t\to\infty}W(t)\leqslant\rho_2 \quad (\text{п. н.}). \qquad (5.23)$$

Пусть теперь $\varepsilon>0$ достаточно мало. В силу (5.23) найдется такое достаточно большое $T=T(\varepsilon)$, что

$$\mathsf{P}\{\rho_1-\varepsilon<W(t)<\rho_2+\varepsilon \text{ при всех } t>T\}>1-\varepsilon.$$

«Выпуская» теперь траекторию $(\tilde{X}(t), \tilde{W}(t))$ процесса (5.10), (5.13) с $r_1=\rho_1-\varepsilon$, $r_2=\rho_2+\varepsilon$ из той точки, в которой в момент времени T оказалась траектория процесса (5.9), (5.10) с начальным условием $X(1)=x$, $W(0)=0$, убеждаемся на основании теоремы 5.1, что

$$\lim_{t\to\infty}\tilde{X}(t)=x_0, \qquad \lim_{t\to\infty}\tilde{W}(t)=\alpha \quad (\text{п. н.}).$$

Так как согласно выбору $T=T(\varepsilon)$ справедливо неравенство

$$\mathsf{P}\{\sup_{t>T}\{|X(t)-\tilde{X}(t)|+|W(t)-\tilde{W}(t)|\}=0\}>1-\varepsilon,$$

а ε произвольно мало, то теорема доказана.

§ 6. Асимптотическая оптимальность

В предыдущем параграфе мы установили сходимость адаптивных процедур РМ при соответствующих ограничениях. Однако пока неясно, чем эти процедуры лучше обычной процедуры РМ, изученной ранее. Для того чтобы ответить на этот вопрос, мы изучим предельное распределение $\sqrt{t}\,(X(t)-x_0)$ при $t\to\infty$.

Теорема 6.1. *Пусть выполнены условия теоремы* 5.1, *причем в условии* (5.15)

$$\varepsilon > 1/4. \tag{6.1}$$

Пусть, далее,

$$\lim_{\substack{t\to\infty \\ x\to x_0}} \mathsf{M}G^2(t, x, \omega) = \sigma_0^2 \tag{6.2}$$

и для некоторого $\theta > 0$

$$\lim_{R\to\infty} \sup_{|x-x_0|<\theta} \sup_{t\geqslant 1} \int\limits_{|G(t,\, x,\, \omega)|>R} G^2(t, x, \omega)\, \mathsf{P}\{d\omega\} = 0. \tag{6.3}$$

Тогда процесс $X(t)$, *определяемый формулами* (5.13), (5.10) *и начальным условием* $X(1) = x$, $W(0) = 0$, *удовлетворяет соотношению*

$$\sqrt{t}\,(X(t) - x_0) \sim \mathfrak{N}\left(0, \frac{\sigma_0^2}{2\alpha^2}\right). \tag{6.4}$$

З а м е ч а н и е. Дисперсия нормального закона в (6.4) на первый взгляд кажется вдвое меньшей, чем оптимальная дисперсия, указанная в начале § 5. Вспомним, однако, что для вычисления $X(t+1)$ нам потребовалось $2t$ независимых наблюдений в точках $X(i) \pm c(i)$, $i = 1, 2, \ldots, t$. Очевидно, для обычной процедуры РМ (5.4) при оптимальном выборе параметра a также имеем

$$\sqrt{t}\,(X(2t) - x_0) \sim \mathfrak{N}\left(0, \frac{\sigma^2}{2\alpha^2}\right).$$

В этом смысле теорема 6.1 позволяет достичь асимптотически оптимального результата.

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 6.1. 1) Предположим сначала, что $r_2 < 2r_1$ в условии (5.12) и, кроме того, функция $R(x)$ при всех $x \in E_1$ удовлетворяет неравенству

$$R(x)\,x > \frac{\alpha}{2} x^2. \tag{6.5}$$

Пусть $(\dot{X}(t), \dot{W}(t))$ — процесс, определяемый соотношениями (5.13), (5.10) и начальным условием $X(s) = \zeta$, $W(s) = \eta$ (ζ и η $\mathscr{F}_s$-измеримы и имеют конечную дисперсию).

Легко проверить справедливость аналогичного (6.1.5) представления процесса $Y(t) = \sqrt{t}\,\dot{X}(t)$ (мы, как обычно, считаем для простоты $x_0 = 0$):

$$Y(t+1) = A_{s-1\,t}\sqrt{s}\,\zeta + \sum_{k=1}^{t} \frac{A_{kt}}{\sqrt{k}} C(k)\mathring{X}(k) -$$

$$-\sum_{k=s}^{t} \frac{A_{kt}\sqrt{1+\frac{1}{k}}}{\sqrt{k}} \left\{ \frac{R(\mathring{X}(k)+c(k)) + R(\mathring{X}(k)-c(k)) - 2\alpha \mathring{X}(k)}{2[\hat{W}(k)]} \right\} -$$

$$-\sum_{k=s}^{t} \frac{A_{kt}\sqrt{1+\frac{1}{k}}}{\sqrt{k}} \frac{G_1(k+1, \mathring{X}(k), \omega)}{[\hat{W}(k)]}, \qquad (6.6)$$

где

$$A_{kt} = \begin{cases} \prod_{m=k+1}^{t} \left(1 + \left(-\frac{\alpha}{[\hat{W}(m)]} + \frac{1}{2}\right)\frac{1}{m}\right) & \text{при} \quad k < t, \\ 1 & \text{при} \quad k = t, \end{cases}$$

$C(k)$ — случайная величина, удовлетворяющая неравенству

$$|\, kC(k)\, | \leqslant c_1 \quad (\text{п. н.}).$$

(Здесь и далее c_i — неслучайные постоянные.)

Так как $r_1 < [\hat{W}(m)] < r_2$ (п. н.) и $r_2 < 2r_1$, то при всех $m = 1, 2, \ldots$

$$\frac{1}{2} - \frac{\alpha}{[\hat{W}(m)]} < \frac{1}{2} - \frac{r_1}{r_2} = -\beta < 0 \quad (\text{п. н.})$$

Поэтому для всех целых $k > \beta$, $k \leqslant t-1$

$$|A_{kt}| \leqslant \prod_{m=k+1}^{t} \left(1 - \frac{\beta}{m}\right) \leqslant c_2 \left(\frac{k}{t}\right)^{\beta}. \qquad (6.7)$$

Это соотношение можно считать справедливым и при всех $k \leqslant t-1$ в силу равенства $A_{st} = A_{sk}A_{kt}$.

Как и в гл. 6, необходимо теперь оценить каждый из членов в представлении (6.6). Первый из них есть $o(1)$ при $t \to \infty$ согласно (6.7). Второй также стремится к нулю в силу (6.7), теоремы 5.1 и оценки $C(k) = O(1/k)$ (п. н.). Для оценки третьего члена заметим прежде всего, что, в силу непрерывности $R''(x)$ в точке x_0 и теоремы 5.1, при $k \to \infty$

$$\frac{1}{2}(R(\hat{X}(k)+c(k))+R(\hat{X}(k)-c(k)))-\alpha\hat{X}(k)=$$
$$=\frac{1}{2}R''(x_0)(\hat{X}^2(k)+c^2(k))+o((\hat{X}^2(k))+c^2(k)).$$

Таким образом, и третьим членом в представлении (6.6) можно пренебречь, если при $t \to \infty$

$$\sum_{k=s}^{t}\frac{A_{kt}}{\sqrt{k}}c^2(k)\to 0 \quad (\text{п. н.}),$$
$$\sum_{k=s}^{t}\frac{A_{kt}}{\sqrt{k}}\hat{X}^2(k)\to 0 \quad (\text{п. н.}). \tag{6.8}$$

Первое из этих соотношений немедленно вытекает из (6.7), (5.15) и (6.1). Для доказательства (6.8) достаточно проверить, что при сделанных предположениях для некоторого $\varepsilon_1 > 0$ и $t \to \infty$

$$\hat{X}^2(t)=O(t^{-1/2-\varepsilon_1}) \quad (\text{п. н.}). \tag{6.9}$$

Доказательство последнего соотношения вполне аналогично доказательству леммы 6.2.1. А именно, как и при доказательстве этой леммы, достаточно установить при некотором $\gamma > 1/2$ аналогичное (6.2.7) неравенство для $L(t^\gamma x^2)$. В самом деле, из (5.21) и (6.5) находим

$$L(t^\gamma x^2)=(t+1)^\gamma Lx^2+x^2((t+1)^\gamma-t^\gamma)\leqslant$$
$$\leqslant -\frac{2t^{\gamma-1}}{r_2}R(x)x+K_2g(t)t^\gamma(1+x^2)+\gamma(t+1)^{\gamma-1}x^2\leqslant$$
$$\leqslant\left(\gamma\left(1+\frac{1}{t}\right)^{\gamma-1}-\frac{\alpha}{r_2}\right)t^{\gamma-1}x^2+K_2g(t)t^\gamma(1+x^2). \tag{6.10}$$

В силу (6.1) постоянную $\gamma > 1/2$ можно выбрать так, что

$$g(t)t^\gamma=\left(\frac{1}{t^2}+\frac{c^2(t)}{t}\right)t^\gamma$$

— член сходящегося ряда. Далее, согласно (5.12) и предположению $2r_1 > r_2$ справедливо неравенство $r_2/2 < \alpha < r_2$. Следовательно, постоянную γ можно считать удовлетворяющей также неравенству $\gamma r_2 < \alpha$. Отсюда вытекает, что при достаточно большом t выражение

$\gamma\left(1+\frac{1}{t}\right)^{\nu-1}-\frac{\alpha}{r_2}$ меньше отрицательной постоянной. Из (6.10) и приведенных соображений аналогично доказательству леммы 6.2.1 получим (6.9).

Таким образом, задача свелась к изучению предельного распределения выражения

$$\sum_{k=s}^{t}\frac{A_{kt}}{\sqrt{k}}\,\frac{G_1(k+1,\,\hat{X}(k),\,\omega)}{[\hat{W}(k)]}$$

при $t\to\infty$. Повторяя с небольшими видоизменениями рассуждения теоремы 6.6.1 и снова пользуясь (6.7), убедимся, что это предельное распределение нормально с параметрами $(0,\ \sigma_0^2/2\alpha^2)$. Множитель 1/2 в выражении для дисперсии, возникает потому, что в данном случае

$$\lim_{\substack{t\to\infty\\ x\to x_0}}\mathsf{M}G_1^2(t,\,x,\,\omega)=\frac{1}{2}\,\sigma_0^2.$$

Итак, теорема доказана при дополнительных условиях (6.5) и $r_2<2r_1$.

2) Общий случай можно свести к рассмотренному в п. 1) с помощью неоднократно применявшегося приема. Пусть $(X(t),\ W(t))$ — процесс, фигурирующий в формулировке теоремы, ε — произвольно малое положительное число, а ε_1 — такое число, что $R(x)(x-x_0)>\frac{\alpha}{2}(x-x_0)^2$ при $|x-x_0|<\varepsilon_1$. Обозначим $\rho_1=\max(3/4\alpha,\ r_1)$, $\rho_2=\min(5/4\alpha,\ r_2)$. Число T выберем настолько большим, что

$$\mathsf{P}\{\sup_{t>T}|X(t)-x_0|>\varepsilon_1\}+1-\mathsf{P}\{W(t)\in(\rho_1,\,\rho_2)\ \text{при всех}\ t>T\}<\varepsilon \tag{6.11}$$

(такой выбор возможен по теореме 5.1).

Рассмотрим теперь при $t>T$ процесс $X_T(t)$, $W_T(t)$, определяемый соотношениями (5.10), (5.6),

$$X(t+1)-X(t)=$$
$$=-\frac{1}{t\,[W(t)]_{\rho_1}^{\rho_2}}\left\{\frac{\hat{R}(X(t)+c(t))+\hat{R}(X(t)-c(t))}{2}+\right.$$
$$\left.+G_1(t+1,\,X(t),\,\omega)\right\}$$

и начальными условиями $\bar{X}_T(T) = X(T)$, $\bar{W}_T(T) = W(T)$.
Здесь

$$\bar{R}(x) = \begin{cases} R(x) & \text{при} \quad |x - x_0| < \varepsilon, \\ R(x_0 + \varepsilon) + \alpha(x - x_0 - \varepsilon) & \text{при} \quad x - x_0 > \varepsilon, \\ R(x_0 - \varepsilon) + \alpha(x - x_0 + \varepsilon) & \text{при} \quad x - x_0 < -\varepsilon. \end{cases}$$

Очевидно, для процесса $\bar{X}_T(t)$, $\bar{W}_T(t)$ справедливо утверждение теоремы в силу доказанного в п. 1). Кроме того, из (6.11) вытекает, что

$$\mathsf{P}\{\sup_{t>T}(|X(t) - \bar{X}_T(t)| + |W(t) - \bar{W}_T(t)|) > 0\} < \varepsilon.$$

Отсюда немедленно следует и утверждение теоремы для процесса $X(t)$ (см. конец доказательства теоремы 6.5.1).

Теорема 6.2. *Если выполнены условия теоремы* 5.2 с $\varepsilon > 1/4$, *а также условия* (6.2) *и* (6.3), *то процесс* $X(t)$, *определяемый формулами* (5.9), (5.10) *и начальными условиями* $X(1) = x$, $W(0) = 0$, *удовлетворяет соотношению* (6.4).

Доказательство этой теоремы вполне аналогично второй части доказательства теоремы 6.1. Мы предоставим его читателю.

ГЛАВА 8

РЕКУРРЕНТНОЕ ОЦЕНИВАНИЕ
(Дискретное время)

Рассматривается применение процедуры РМ к статистической задаче оценки многомерного, вообще говоря, параметра распределения. Особое внимание уделено построению процедур оценивания с асимптотически оптимальными свойствами (асимптотически эффективных). Особенностью рассматриваемого подхода является предположение об отсутствии априорной информации об оцениваемом параметре. Поэтому мы оставляем в стороне рассмотрение оптимальных с точки зрения байесовского подхода рекуррентных процедур оценивания (см. Калман и Бьюси [1], Стратонович [1], Липцер и Ширяев [1] и др.).

§ 1. Неравенство Крамера-Рао. Эффективность оценок

Пусть $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ — независимые случайные векторы из E_l, каждый из которых имеет распределение с плотностью [1] $f(y, x)$ относительно σ-конечной меры $\nu(\cdot)$, определенной на некоторой σ-алгебре множеств из E_l. (В частности, мера $\nu(\cdot)$ может быть сосредоточенной в счетном числе точек y_j, $j = 1, 2, \ldots$, что соответствует случайным величинам Y_i, принимающим значение y_j с вероятностью $f(y_j, x)$.) Относительно параметра x предположим, что он принимает значение из открытого множества $\mathscr{X} \subset E_h$.

Будем считать, что статистик «знает» значения случайных величин $Y_1, \ldots, Y_n$ и функцию $f(y, x)$, но не знает, каково значение x. Более того, статистик не имеет

---

[1]) В этом случае говорят, что $Y_1, \ldots, Y_n$ — независимые наблюдения из генеральной совокупности с плотностью $f(y, x)$.

никаких априорных сведений об x, кроме указания $x \in \mathscr{X}$. В этой обстановке задача параметрического статистического оценивания состоит в том, чтобы по «наблюдениям» $Y_1, \ldots, Y_n$ построить оценку $x_n(Y_1, \ldots, Y_n)$ неизвестного параметра x. Более точно, *оценкой* или *статистикой*, основанной на n наблюдениях, называют любую $\mathscr{N}_n$ — измеримую случайную величину, где $\mathscr{N}_n$ — минимальная σ-алгебра событий, относительно которой измеримы все случайные величины $Y_1, \ldots, Y_n$.

Конечно, при столь общем определении в понятие оценки входят и такие функции наблюдений, которые весьма далеки от оцениваемой величины. Естественно поэтому стремиться из множества всевозможных оценок выбрать наилучшие в смысле того или иного критерия качества. Чаще всего качество оценки измеряют величиной

$$S_n(x) = \mathsf{M}_x |x_n(Y_1, \ldots, Y_n) - x|^2 =$$
$$= \int \ldots \int |x_n(y_1, \ldots, y_n) - x|^2 \prod_{i=1}^{n} f(y_i, x)\, \nu(dy_1) \ldots \nu(dy_n).$$

(Здесь и далее символы M_x, P_x означают, что математическое ожидание и вероятность вычисляются при значении параметра, равном x). Приведем несколько общепринятых определений, восходящих, в основном, к Фишеру, см. Крамер [1].

Статистика x_n называется *несмещенной оценкой* параметра x, если при всех $x \in \mathscr{X}$ выполнено соотношение

$$\mathsf{M}_x x_n = x,$$

и *асимптотически несмещенной*, если $\mathsf{M}_x(x_n - x) = b_n(x) \to 0$ при $n \to \infty$. Вектор $b_n(x)$ называется *смещением* оценки.

Оценка x_n называется *состоятельной в сильном* (*слабом*) *смысле*, если $x_n \to x$ при $n \to \infty$ для всех $x \in \mathscr{X}$ с вероятностью 1 (по вероятности) в смысле вероятности P_x.

Мы выведем теперь одно важное неравенство, дающее оценку снизу для ковариационной матрицы вектора $x_n - x$. Для простоты мы предположим сначала, что параметр одномерен, а оценка x_n — несмещенная.

Выражение

$$I(x) = \int \frac{(f'_x(y, x))^2}{f(y, x)}\, \nu(dy)$$

называется *информационным количеством Фишера* для плотности $f(y, x)$. При определенных условиях ниже будет установлено следующее неравенство, связывающее величины $S_n(x)$ и $I(x)$ для несмещенных оценок:

$$S_n(x) \geqslant \frac{1}{n} I^{-1}(x). \qquad (1.1)$$

Это неравенство так же, как и его обобщения на случай многомерных смещенных оценок, называется *информационным* или *неравенством Крамера — Рао*. Мы приведем два вывода соотношения (1.1), так как они требуют разных условий на плотность $f(y, x)$.

Обозначим

$$\mathcal{Y} = (y_1, \ldots, y_n), \; f_n(\mathcal{Y}, x) = \prod_{j=1}^{n} f(y_j, x),$$
$$\nu_n(d\mathcal{Y}) = \nu(dy_1) \ldots \nu(dy_n). \qquad (1.2)$$

Теорема 1.1. *Пусть функция $f(y, x)$ дифференцируема по x, $I(x) < \infty$ и справедливы равенства*

$$\lim_{\Delta \to 0} \frac{1}{\Delta^2} \int \frac{(f_n(\mathcal{Y}, x+\Delta) - f_n(\mathcal{Y}, x))^2}{f_n(\mathcal{Y}, x)} \nu_n(d\mathcal{Y}) = \int \left(\frac{\partial f_n(\mathcal{Y}, x)}{\partial x} \right)^2 \frac{\nu_n(d\mathcal{Y})}{f_n(\mathcal{Y}, x)}, \qquad (1.3)$$

$$\int \frac{\partial f(y, x)}{\partial x} \nu(dy) = \frac{\partial}{\partial x} \int f(y, x) \nu(dy). \qquad (1.4)$$

Тогда для любой несмещенной оценки x_n параметра x справедливо неравенство (1.1).

З а м е ч а н и е 1.1. Условия (1.3), (1.4) означают возможность предельного перехода под знаком интеграла. Из анализа известно, что для (1.3) достаточно, например, существования интегрируемой по мере $\nu_n(d\mathcal{Y})$ функции $g_n(\mathcal{Y}, x)$ такой, что при всех достаточно малых Δ

$$\frac{(f_n(\mathcal{Y}, x+\Delta) - f_n(\mathcal{Y}, x))^2}{f_n(\mathcal{Y}, x)\Delta^2} < g_n(\mathcal{Y}, x).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 1.1. Так как оценка x_n — несмещенная, то справедливы равенства

$$\int x_n(\mathcal{Y}) f_n(\mathcal{Y}, x) \nu_n(d\mathcal{Y}) = x,$$

$$\int x_n(\mathcal{Y}) f_n(\mathcal{Y}, x+\Delta) \nu_n(d\mathcal{Y}) = x + \Delta.$$

Значит,

$$\Delta = \int x_n(\mathcal{Y})\,[f_n(\mathcal{Y}, x+\Delta) - f_n(\mathcal{Y}, x)]\,\nu_n(d\mathcal{Y}).$$

Учитывая равенство $\int f_n\ (\mathcal{Y}, x)\,\nu_n\,(d\mathcal{Y}) = 1$, справедливое при всех $x \in \mathcal{X}$, получаем отсюда

$$\Delta = \int (x_n(\mathcal{Y}) - x)\,[f_n(\mathcal{Y}, x+\Delta) - f_n(\mathcal{Y}, x)]\,\nu_n(d\mathcal{Y}). \tag{1.5}$$

Из (1.5), применяя неравенство Коши — Буняковского, находим:

$$\Delta^2 \leqslant S_n(x) \int \frac{[f_n(\mathcal{Y}, x+\Delta) - f_n(\mathcal{Y}, x)]^2}{f_n(\mathcal{Y}, x)}\,\nu_n(d\mathcal{Y}).$$

Отсюда и из (1.3) вытекает неравенство

$$S_n(x) \geqslant \frac{1}{\displaystyle\int \frac{\left(\frac{\partial f_n(\mathcal{Y}, x)}{\partial x}\right)^2}{f_n(\mathcal{Y}, x)}\,\nu_n(d\mathcal{Y})}.$$

Заметим теперь, что в силу (1.2) и (1.4)

$$\int \frac{\left(\frac{\partial f_n(\mathcal{Y}, x)}{\partial x}\right)^2}{f_n(\mathcal{Y}, x)}\,\nu_n(d\mathcal{Y}) =$$

$$= nI(x) + \sum_{i \neq j} \int f'_x(y_i, x)\,\nu(dy_i) \int f'_x(y_j, x)\,\nu(dy_j) = nI(x).$$

Из двух последних соотношений следует утверждение теоремы.

Теорема 1.2. *Если функция $f(y, x)$ абсолютно непрерывна по x для почти всех y, функция $I(x)$ непрерывна, а оценка x_n — несмещенная, то неравенство (1.1) справедливо во всех точках непрерывности функции $S_n(x)$.*

Доказательство. Соотношение (1.5) преобразуем к виду

$$\Delta = \int (x_n(\mathcal{Y}) - x)\left(\sqrt{f_n(\mathcal{Y}, x+\Delta)} - \sqrt{f_n(\mathcal{Y}, x)}\right) \times$$
$$\times \left(\sqrt{f_n(\mathcal{Y}, x+\Delta)} + \sqrt{f_n(\mathcal{Y}, x)}\right)\nu_n(d\mathcal{Y})$$

и снова применим неравенство Коши — Буняковского.

Тогда получим, применяя также элементарное неравенство $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2 \leqslant 2(a+b)$:

$$\Delta^2 \leqslant 2\int (x_n(\mathcal{Y})-x)^2 (f_n(\mathcal{Y}, x+\Delta)+f_n(\mathcal{Y}, x))\, \nu_n(d\mathcal{Y}) \times$$
$$\times \int \left(\sqrt{f_n(\mathcal{Y}, x+\Delta)}-\sqrt{f_n(\mathcal{Y}, x)}\right)^2 \nu_n(d\mathcal{Y}). \qquad (1.6)$$

Оценим сверху каждый из сомножителей в правой части последнего неравенства. Прежде всего,

$$\begin{aligned} &\int (x_n(\mathcal{Y})-x)^2 f_n(\mathcal{Y}, x)\, \nu_n(d\mathcal{Y}) = S_n(x), \\ &\int (x_n(\mathcal{Y})-x)^2 f_n(\mathcal{Y}, x+\Delta)\, \nu_n(d\mathcal{Y}) = S_n(x+\Delta)+\Delta^2. \end{aligned} \qquad (1.7)$$

Далее находим, учитывая (1.2) и элементарное неравенство $1-a^n < n(1-a)$, справедливое при $0<a<1$,

$$\int \left(\sqrt{f_n(\mathcal{Y}, x+\Delta)}-\sqrt{f_n(\mathcal{Y}, x)}\right)^2 \nu_n(d\mathcal{Y}) =$$
$$= 2-2\int \sqrt{f_n(\mathcal{Y}, x+\Delta)\, f_n(\mathcal{Y}, x)}\, \nu_n(d\mathcal{Y}) =$$
$$= 2-2\left(\int \sqrt{f(y, x+\Delta)\, f(y, x)}\, \nu(dy)\right)^n \leqslant$$
$$\leqslant 2n\left(1-\int \sqrt{f(y, x+\Delta)\, f(y, x)}\, \nu(dy)\right) =$$
$$= n\int \left(\sqrt{f(y, x+\Delta)}-\sqrt{f(y, x)}\right)^2 \nu(dy). \qquad (1.8)$$

Из (1.6) — (1.8) получаем справедливое без каких-либо предположений относительно $f(y, x)$ и несмещенной оценки x_n неравенство

$$\frac{S_n(x)+S_n(x+\Delta)+\Delta^2}{2} \geqslant$$
$$\geqslant \frac{1}{4n\dfrac{1}{\Delta^2}\displaystyle\int \left(\sqrt{f(y, x+\Delta)}-\sqrt{f(y, x)}\right)^2 \nu(dy)} \qquad (1.9)$$

Используя теперь условия теоремы относительно $f(y, x)$, неравенство Коши — Буняковского и теорему Фубини, находим

$$\frac{4}{\Delta^2}\int\left(\sqrt{f(y,x+\Delta)}-\sqrt{f(y,x)}\right)^2\nu(dy)=$$

$$=\frac{4}{\Delta^2}\int\left(\int_x^{x+\Delta}\frac{\partial\sqrt{f(y,u)}}{\partial u}\,du\right)^2\nu(dy)\leqslant$$

$$\leqslant\frac{4}{\Delta}\int\nu(dy)\int_x^{x+\Delta}\left(\frac{\partial\sqrt{f(y,u)}}{\partial u}\right)^2du=\frac{1}{\Delta}\int_x^{x+\Delta}I(u)\,du. \qquad (1.10)$$

Из (1.9) и (1.10), переходя к пределу при $\Delta\to 0$, получим утверждение теоремы.

Задача 1.1. Получите следующее уточнение неравенства (1.9):

$$\frac{S_n(x)+S_n(x+\Delta)}{2}+\frac{\Delta^2}{4}\geqslant$$

$$\geqslant\frac{1}{\frac{4n}{\Delta^2}\int\left(\sqrt{f(y,x+\Delta)}-\sqrt{f(y,x)}\right)^2\nu(dy)}. \qquad (1.9')$$

Замечание. Неравенство (1.9) (или (1.9′)) может быть использовано и для получения оценок снизу для дисперсии в случае, когда условия гладкости теорем 1.1 или 1.2 не выполняются.

Оценка x_n параметра x называется *эффективной*, если неравенство (1.1) обращается для нее в равенство:

$$S_n(x)=\frac{1}{n}I^{-1}(x), \qquad x\in\mathscr{X}. \qquad (1.11)$$

Эффективные оценки существуют лишь в редких случаях. Значительно чаще удается построить оценки, близкие к эффективным при большом числе наблюдений. Поэтому уместно следующее определение.

Оценка x_n называется *асимптотически эффективной в сильном смысле в* $\mathscr{X}$, если для $x\in\mathscr{X}$

$$\lim_{n\to\infty}[nS_n(x)]=I^{-1}(x). \qquad (1.12)$$

Конечно, асимптотическая эффективность оценки еще не гарантирует ее хорошего качества при не слишком больших n. Это обстоятельство следует иметь в виду при практическом применении построенных ниже, в §§ 3—5, рекуррентных процедур.

Для обычно применяемых статистических оценок при некоторых условиях удается доказать их асимптотическую нормальность, точнее, справедливость при $n \to \infty$ соотношения

$$\sqrt{n}\,(x_n - x) \sim \mathfrak{N}\,(0,\ \sigma^2\,(x)).$$

В этом случае величину $\sigma^2\,(x)/n$ называют *асимптотической дисперсией* оценки x_n. Если при этом $\sigma^2\,(x) = I^{-1}\,(x)$, то (ср. с (1.12)) оценка x_n называется *асимптотически эффективной в слабом смысле* или просто асимптотически эффективной.

Величина $\varkappa\,(x) = \sigma^{-2}\,(x)\,I^{-1}\,(x)$ называется *асимптотической эффективностью* оценки x_n.

Задача 1.2. Пусть $f\,(y,\ x)$ — гауссова плотность вероятности со средним $m_1\,(x)$ и дисперсией $m_2\,(x) \neq 0$:

$$f\,(y,\ x) = (2\pi m_2\,(x))^{-1/2} \exp\left\{-\frac{(y - m_1\,(x))^2}{2m_2\,(x)}\right\}.$$

Проверьте в этом случае справедливость равенства

$$I\,(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{m_2'\,(x)}{m_2\,(x)}\right)^2 + \frac{(m_1'\,(x))^2}{m_2\,(x)}. \tag{1.13}$$

Задача 1.3. Пусть x_n — асимптотически эффективная оценка параметра x, а $\varphi\,(x)$ — функция, имеющая непрерывную и не обращающуюся в нуль при $x \in \mathscr{X}$ производную $\varphi'\,(x)$. Докажите, что $\varphi\,(x_n)$ — асимптотически нормальная и асимптотически эффективная (в слабом смысле) оценка параметра $\varphi\,(x)$.

§ 2. Неравенство Крамера — Рао в многомерном случае

Если параметр x — многомерный, $x \in \mathscr{X} \subset E_k$, то при некоторых ограничениях справедлив матричный аналог неравенства (1.1). Перед его выводом введем матричный аналог информационного количества Фишера.

Матрица $I\,(x)$ с элементами

$$I_{ij}\,(x) = \int \frac{\partial f\,(y,\ x)}{\partial x_i}\,\frac{\partial f\,(y,\ x)}{\partial x_j}\,\frac{\nu\,(dy)}{f\,(y,\ x)}$$

называется *информационной матрицей* Фишера. Эта симметричная матрица всегда неотрицательно определена, так как для любого $\mu \in E_k$

$$(I(x)\mu, \mu) = \int \frac{\left(\frac{\partial f(y, x)}{\partial x}, \mu\right)^2}{f(y, x)} \nu(dy). \tag{2.1}$$

Мы предположим, что эта матрица положительно определена, так что существует обратная матрица $I^{-1}(x)$.

Пусть $x_n = (x_n^1, \ldots, x_n^k)^*$ — оценка вектора x. Обозначим $S_n(x)$ матрицу с элементами $\mathsf{M}_x [x_n^i - x^i][x_n^j - x^j]$. Тогда

$$\mathsf{M}_x (x_n - x, \lambda)^2 = (S_n(x)\lambda, \lambda). \tag{2.2}$$

В этих обозначениях при выполнении некоторых условий гладкости для несмещенной оценки x_n снова выполнено неравенство (1.1), которое в этом случае следует понимать как неравенство для симметричных матриц ($A \geqslant B$, если разность $A - B$ — неотрицательно определенная матрица). При выводе этого неравенства нам придется потребовать некоторую гладкость функции $f(y, x)$ по x.

Для определенной в $\mathscr{X}$ функции $\varphi(x)$ будем писать $\varphi \in C_1^0(\mathscr{X})$, если $\varphi(x)$ дифференцируема почти всюду по x при $x \in \mathscr{X}$ и для всех x, μ таких, что $x + t\mu \in \mathscr{X}$ при $0 \leqslant t \leqslant 1$, функция одного переменного $\varphi(x + t\mu)$ абсолютно непрерывна по t. Очевидно, для $\varphi \in C_1^0(\mathscr{X})$, $x + t\mu \in \mathscr{X}$ при $t \in [0, \Delta]$ справедливо равенство

$$\varphi(x + \Delta\mu) - \varphi(x) = \int_0^\Delta \frac{d\varphi(x + u\mu)}{du}\, du = \int_0^\Delta \left(\frac{\partial\varphi(x + u\mu)}{\partial x}, \mu\right) du. \tag{2.3}$$

Теорема 2.1. *Пусть функция $\sqrt{f(y, x)} \in C_1^0(\mathscr{X})$ для почти всех y по мере $\nu(dy)$, матрица $I(x)$ непрерывна и невырождена, а оценка x_n — несмещенная. Тогда во всех точках непрерывности матрицы $S_n(x)$ справедливо матричное неравенство*

$$S_n(x) \geqslant \frac{1}{n} I^{-1}(x). \tag{2.4}$$

Доказательство. Пусть $x \in \mathscr{X}$, $\mu \in E_k$, $|\mu| = 1$. Тогда при достаточно малом $\Delta > 0$ справедливы равенства

$$\int x_n(\mathcal{Y}) f_n(\mathcal{Y}, x)\, \nu_n(d\mathcal{Y}) = x,$$

$$\int x_n(\mathcal{Y}) f_n(\mathcal{Y}, x+\Delta\mu)\, \nu_n(d\mathcal{Y}) = x+\Delta\mu,$$

из которых аналогично предыдущему получим

$$\int (x_n(\mathcal{Y}) - x)\,[f_n(\mathcal{Y}, x+\Delta\mu) - f_n(\mathcal{Y}, x)]\, \nu_n(d\mathcal{Y}) = \Delta\mu. \tag{2.5}$$

Умножая (2.5) скалярно на λ и применяя неравенство Коши — Буняковского, приходим к аналогичному (1.6) неравенству

$$\Delta^2(\lambda, \mu)^2 \leqslant 2\int (\lambda, x_n(\mathcal{Y}) - x)^2 (f_n(\mathcal{Y}, x) + f_n(\mathcal{Y}, x+\Delta\mu))\, \nu_n(d\mathcal{Y}) \int \left(\sqrt{f_n(\mathcal{Y}, x+\Delta\mu)} - \sqrt{f_n(\mathcal{Y}, x)}\right)^2 \nu_n(d\mathcal{Y}). \tag{2.6}$$

Далее находим, учитывая (2.2) и повторяя выкладки (1.8),

$$\Delta^2(\lambda, \mu)^2 \leqslant 2\,[(S_n(x)\lambda, \lambda) + (S_n(x+\Delta\mu)\lambda, \lambda) + \Delta^2(\lambda, \mu)^2]\, n \int \left(\sqrt{f(y, x+\Delta\mu)} - \sqrt{f(y, x)}\right)^2 \nu(dy). \tag{2.7}$$

Наконец, с помощью условия $\sqrt{f(y, x)} \in C_1^0(\mathcal{X})$ получим из (2.3) и (2.1)

$$\int \left(\sqrt{f(y, x+\Delta\mu)} - \sqrt{f(y, x)}\right)^2 \nu(dy) = \int \nu(dy) \left(\int_0^\Delta \frac{\left(\frac{\partial f(y, x+u\mu)}{\partial x}, \mu\right)}{2\sqrt{f(y, x+u\mu)}}\, du \right)^2 \leqslant \frac{1}{4}\Delta \int_0^\Delta (I(x+u\mu)\mu, \mu)\, du. \tag{2.8}$$

Из (2.6) — (2.8), переходя к пределу при $\Delta \to 0$, имеем неравенство

$$(I(x)\mu, \mu)(S_n(x)\lambda, \lambda) \geqslant \frac{(\lambda, \mu)^2}{n}.$$

Полагая $\mu = I^{-1}(x)\lambda$, получим эквивалентное (2.4) неравенство

$$(S_n(x)\lambda, \lambda) \geqslant \frac{1}{n}(I^{-1}(x)\lambda, \lambda).$$

Теорема доказана.

Обычно неравенство (2.4) доказывают при других предположениях (см., например, Рао [1]). Аналогичное неравенство можно установить и для смещенных оценок. Мы не будем здесь на этом останавливаться.

В свете (2.4) естественны следующие определения.

Оценка x_n параметра x называется *эффективной*, если $S_n(x) = \frac{1}{n} I^{-1}(x)$ для всех $x \in \mathscr{X}$. Оценку x_n, для которой

$$\lim_{n\to\infty} (nS_n(x)) = I^{-1}(x),$$

мы будем называть *асимптотически эффективной в сильном смысле*.

При довольно общих условиях в курсах статистики доказывают, что обычно применяемые оценки x_n асимптотически нормальны, т. е.

$$\sqrt{n}(x_n - x) \sim \mathfrak{N}(0, S(x)).$$

Если матрица ковариаций предельного нормального закона совпадает с $I^{-1}(x)$, то оценку x_n называют *асимптотически эффективной в слабом смысле* или просто асимптотически эффективной.

Задача 2.1. Пусть $f(y, x)$ — гауссова плотность вероятности в E_l с вектором средних значений $m_1(x)$ и невырожденной ковариационной матрицей m_2, не зависящей от параметра:

$$f(y, x) = (2\pi)^{-\frac{l}{2}} |m_2|^{-1/2} \times \\ \times \exp\left\{-\frac{1}{2}(y - m_1(x))^* m_2^{-1}(y - m_1(x))\right\}.$$

Проверьте, что в этом случае информационная матрица $I(x)$ допускает представление

$$I(x) = \left(\frac{\partial m_1(x)}{\partial x}\right)^* m_2^{-1} \frac{\partial m_1(x)}{\partial x}. \tag{2.9}$$

З а д а ч а 2.2. Пусть $f(y, x)$ — некоторая плотность вероятности в E_l, $x \in \mathscr{X} \subset E_k$, а $I(x)$ — отвечающая ей информационная матрица Фишера. Предположим, что x_n — асимптотически эффективная оценка параметра x, так что

$$\sqrt{n}\,(x_n - x) \sim \mathfrak{N}(0, I^{-1}(x)).$$

Пусть $z = \varphi(x)$ — некоторая функция на $\mathscr{X}$ со значениями в E_k такая, что матрица [1]) $\partial\varphi/\partial x$ невырождена. Покажите, что

а) Информационная матрица плотности $f(x, y)$ относительно параметра $\varphi(x)$ равна

$$\frac{\partial\varphi^{-1*}(z)}{\partial z} I(x) \frac{\partial\varphi^{-1}(z)}{\partial z} = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^{*^{-1}} I(x) \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^{-1}.$$

б) Оценка $\varphi(x_n)$ параметра $\varphi(x)$ асимптотически нормальна и асимптотически эффективна.

§ 3. Оценивание одномерного параметра

Существует ряд общих методов построения оценок параметра x_0 в случае независимых наблюдений (метод наибольшего правдоподобия, байесовские и обобщенные байесовские оценки и т. д.). Общим недостатком этих методов является то, что переход от оценки x_n, построенной по n наблюдениям, к оценке x_{n+1} требует довольно сложного пересчета с использованием всех предыдущих наблюдений. Это обстоятельство делает неудобным применение ЦВМ для построения оценок. Поэтому представляется актуальным поиск таких методов оценивания, которые не требуют сложного пересчета, например, таких, в которых оценка x_{n+1} в момент времени $n+1$ может быть найдена с помощью формулы

$$x_{n+1} = \varphi(n, x_1, \ldots, x_n, Y_{n+1}), \quad n = 0, 1, \ldots$$

со сравнительно просто вычисляемой функцией φ. Однако наиболее удобны и практичны процедуры оценивания, в которых для получения X_{n+1} достаточно знать предыдущую

---

[1]) В этом случае, определена, как известно, обратная функция $\varphi^{-1}(z)$.

оценку X_n и новое наблюдение Y_{n+1}:

$$X_{n+1} = \varphi(n, X_n, Y_{n+1}), \quad n = 0, 1, \ldots \tag{3.1}$$

где φ — функция, вычисление которой требует значительно меньшего числа операций, чем, например, вычисление оценок максимального правдоподобия и байесовских. (Здесь и далее мы обозначаем X_n оценки, вычисляемые по рекуррентным формулам типа (3.1), сохраняя обозначение x_n для произвольных оценок.)

Замечание. Мы уже отмечали, что процедура оценивания (3.1) лишь в том случае представляет практический интерес, когда для вычисления самой функции φ с заданной точностью не требуется слишком много времени. Если же никак не ограничивать класс возможных функций φ, то можно любую оценку записать как одну из компонент двумерной оценки вида (3.1). Действительно, предположим для определенности, что $\mathcal{Y} = E_1$ и пусть $\lambda_n = \Phi_n(Y_1, \ldots, Y_n)$ — последовательность функций, осуществляющих взаимно-однозначное отображение E_n в E_1, а x_n — любая оценка, т. е. любая измеримая функция наблюдений $Y_1, \ldots, Y_n$. Тогда

$$x_{n+1} = x_{n+1}(Y_1, \ldots, Y_n, Y_{n+1}) = \\ = x_{n+1}(\Phi_n^{-1}(\lambda_n), Y_{n+1}) = \varphi(n+1, \lambda_n, Y_{n+1}),$$

$$\lambda_{n+1} = \Phi_{n+1}(Y_1, \ldots, Y_n, Y_{n+1}) = \\ = \Phi_{n+1}(\Phi_n^{-1}(\lambda_n), Y_{n+1}).$$

Таким образом, вектор (x_{n+1}, λ_{n+1}) рекуррентно выражается через (x_n, λ_n) и Y_{n+1}. Довольно ясно, что этот «универсальный» способ построения рекуррентных оценок практически нецелесообразен, так как фактически эквивалентен хранению в памяти машины всех наблюдений.

Ниже будут рассмотрены некоторые конкретные способы построения оценок вида (3.1). В силу вышеизложенных соображений эти оценки только в тех случаях практичны, когда вычисление функции φ с заданной степенью точности сравнительно просто.

Определение. Процедуру оценивания, в которой оценка X_{n+1} может быть вычислена по X_n и Y_{n+1} согласно (3.1), будем называть *рекуррентной*, а соответствующие оценки $X_1, \ldots, X_n$ — *рекуррентными оценками*.

В случае независимых наблюдений Y_i и независимости от них X_0 из теоремы 2.3.1 вытекает, что рекуррентные оценки образуют цепь Маркова. В дальнейшем для простоты всегда предполагается, что X_0 — детерминированная величина, обычно произвольная. Даже в том случае, когда оценка (3.1) далека от эффективной, она может иметь преимущество перед, например, оценкой максимального правдоподобия, так как за то же время она может быть вычислена для значительно бо́льших значений n (с использованием большего числа наблюдений) и практически без использования памяти машины.

В следующих ниже примерах приняты обозначения: $Y_1, \ldots, Y_n$, $Y_i \in E_1$,— независимые случайные величины (наблюдения), распределенные с плотностью $f(y, x_0)$ относительно меры $\nu(dy)$, $x_0 \in E_1$ — неизвестный параметр,

$$m_1(x) = \int yf(y, x)\,\nu(dy),$$

$$m_2(x) = \int (y - m_1(x))^2 f(y, x)\,\nu(dy)$$

— математическое ожидание и дисперсия Y_i, если значение параметра есть x. Будем обозначать также M, P математическое ожидание и вероятность при значении параметра x_0, например, $\mathsf{M}Y_i = m_1(x_0)$.

Пусть $x, y \in E_1$, $m_1(x)$ и $m_2(x)$ конечны, причем $m_1(x)$ — строго возрастающая функция [1]), растущая не быстрее линейной при $|x| \to \infty$. Рассмотрим тогда процедуру

$$X_{n+1} - X_n = a_n(Y_{n+1} - m_1(X_n)), \qquad X_0 = \text{const}, \quad (3.2)$$

где

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < \infty. \quad (3.3)$$

Ясно, что функция $\mathsf{M}(Y_{n+1} - m_1(x)) = m_1(x_0) - m_1(x)$ положительна при $x < x_0$, отрицательна при $x > x_0$ и имеет не более чем линейный рост при

---

[1]) Вместо этого достаточно потребовать положительности при $x \neq x_0$ произведения $(m_1(x) - m_1(x_0))(x - x_0)$ и непрерывности $m_1(x)$.

$|x| \to \infty$. Так как, кроме того, $\mathsf{D}Y_{n+1} = m_2(x_0) < \infty$, то применение теоремы 4.1.1 позволяет утверждать, что в условиях данного примера процедура РМ (3.2) дает состоятельную в сильном смысле оценку параметра x.

При некоторых дальнейших предположениях эта оценка асимптотически нормальна, а иногда и асимптотически эффективна. Пусть в дополнение к сделанным предположениям функция $m_1(x)$ дифференцируема в точке x_0, причем $m_1'(x_0) = \alpha > 0$.

Тогда по теореме 6.5.2 (см. замечание 6.6.1) получим для процедуры

$$X_{n+1} - X_n = \frac{a}{n+1}(Y_{n+1} - m_1(X_n)), \qquad X_0 = \mathrm{const}, \quad (3.4)$$

при $n \to \infty$ соотношение

$$\sqrt{n}\,(X_n - x_0) \sim \mathfrak{N}\left(0, \frac{a^2 m_2(x_0)}{2a\alpha - 1}\right),$$

если только $2a\alpha > 1$. Если, кроме того, предположить, что производная $m_1'(x) > c > 0$ при $x \in E_1$ и $\mathsf{M}\,|Y_i|^\beta < \infty$ для некоторого четного $\beta \geqslant 4/\min(2ac, 1)$, то для процедуры (3.4) выполнены также условия теоремы 6.7.2.

Следовательно, при сделанных предположениях

$$\lim_{n\to\infty} n\mathsf{M}(X_n - x_0)^2 = \frac{a^2 m_2(x_0)}{2a\alpha - 1}. \quad (3.5)$$

Отметим, наконец, что теорема 6.3 позволяет вычислить и предельное совместное распределение случайных величин

$$\sqrt{n}\,(X(n) - x_0), \quad \sqrt{n_1}\,(X_{n_1} - x_0), \ \ldots, \ \sqrt{n_k}\,(X_{n_k} - x_0),$$

когда $n \to \infty$, $n_i/n \to e^{t_i}$.

Резюмируя, сформулируем доказанные утверждения в виде следующих теорем.

Теорема 3.1. *Пусть $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n, \ldots$ — независимые наблюдения из генеральной совокупности с плотностью $f(y, x_0)$, $x_0 \in E_1$, $y \in E_1$. Предположим, что определенные в начале параграфа функции $m_1(x)$ и $m_2(x)$ таковы, что*

$$m_1(x_2) > m_1(x_1) \ \textit{при}\ x_2 > x_1, \quad m_2(x_0) < \infty,$$

а $|m_1(x)|$ растет не быстрее линейной функции при

$|x| \to \infty$. Тогда процедура (3.2) при условии (3.3) дает состоятельную в сильном смысле оценку параметра x_0.

Если, дополнительно, $m_1'(x_0) = \alpha > 0$, $2a\alpha > 1$, то процедура (3.4) асимптотически нормальна и, больше того, при любых $k > 0$, $t_i > 0$, $i = 1, \ldots, k$, $n < n_1 < \ldots < n_k$ таких, что при $n \to \infty$ $\ln [n_i/n] \to t_i$, совместное распределение случайных величин

$$\sqrt{n}(X_n - x_0), \quad \sqrt{n_1}(X_{n_1} - x_0), \ldots, \sqrt{n_k}(X_{n_k} - x_0)$$

сходится при $n \to \infty$ к совместному распределению случайных величин $X(0)$, $X(t_1)$, ..., $X(t_k)$, где $X(t)$ — гауссовский марковский стационарный процесс, удовлетворяющий стохастическому уравнению

$$dX(t) = \left(\frac{1}{2} - a\alpha\right) X(t)\,dt + a\sqrt{m_2(x_0)}\,d\xi(t).$$

Наконец, если, кроме того, $m_1'(x) > c > 0$ для всех $x \in E_1$ и $\mathsf{M}\,|Y_i|^\beta < \infty$ для некоторого четного $\beta \geqslant 4/\min(2ac, 1)$, то справедливо и соотношение (3.5).

Если бы статистик знал значение $\alpha = m_0'(x_1)$, то он мог бы выбрать $a = 1/\alpha$, что позволило бы ему минимизировать асимптотическую дисперсию оценки в классе процедур вида (3.4). В этом случае разность $X_n - x_0$ асимптотически нормальна с асимптотической дисперсией $\frac{1}{n}\frac{m_2(x_0)}{(m_1'(x_0))^2}$, а асимптотическая эффективность оценки X_n

$$\varkappa(x_0) = \frac{(m_1'(x_0))^2}{m_2(x_0)\,I(x_0)}. \tag{3.6}$$

К сожалению, за исключением самых простых случаев (когда $m_1'(x) = \text{const}$, что соответствует линейной функции регрессии), величина α неизвестна статистику. Конечно, можно было бы заменять α его оценкой α_n, выработанной в результате наблюдений, как мы делали это выше, в § 7.6. Однако в данном случае возможен другой более простой путь.

Теорема 3.2. *Пусть $m_1'(x)$ — непрерывна, $0 < c_1 \leqslant m_1'(x) \leqslant c_2 < \infty$ и $m_2(x_0) < \infty$. Тогда процедура*

$$X_{n+1} - X_n = \frac{1}{n+1}\frac{(Y_{n+1} - m_1(X_n))}{m_1'(X_n)}, \quad X_0 = \text{const}, \tag{3.7}$$

состоятельна в сильном смысле и асимптотически нормаль-

на, а ее асимптотическая эффективность определяется формулой (3.6). *При этом*

$$\mathsf{M}\,[\sqrt{n}\,(X_n - x_0)]^2 \to \frac{m_2(x_0)}{(m_1'(x_0))^2}, \qquad n \to \infty, \tag{3.8}$$

если $\mathsf{M}\,|Y_i|^\beta < \infty$ *для четного* $\beta > 4\,[\min(2c_1/c_2,\ 1)]^{-1}$.

Доказательство этого утверждения сводится к проверке условий теорем 6.6.2 и 6.7.2. Мы ограничимся лишь проверкой наиболее сложного условия (6.6.3), выполнение которого вытекает в данном случае из неравенства

$$\int\limits_{\left|\frac{y-m_1(x_0)}{m_1'(x)}\right|>R} \frac{(y-m_1(x_0))^2}{(m_1'(x))^2} f(y,\ x_0)\,\nu(dy) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{c_1^2} \int\limits_{|y-m_1(x_0)|>Rc_1} (y-m_1(x_0))^2 f(y,\ x_0)\,\nu(dy)$$

и конечности $m_2(x_0)$.

Сравнение процедур (3.4) и (3.7) показывает, что процедура (3.7) при больших n близка к процедуре (3.4) с оптимальным значением $a = 1/\alpha$. При этом в каждый момент времени вместо $\alpha = m_1'(x_0)$ в процедуре используется оценка $\alpha_n = m_1'(X_n)$ параметра α, состоятельная в силу сходимости $X_n \to x_0$. В этом смысле процедуру (3.7) можно назвать «адаптивной».

Задача 3.1. Пусть равенства

$$m_1(x) = \int y f(y,\ x)\,\nu(dy), \qquad 1 = \int f(y,\ x)\,\nu(dy)$$

можно дифференцировать по x под знаком интеграла. Докакажите, что в этом случае справедливо неравенство

$$(m_1'(x))^2 \leqslant m_2(x)\,I(x). \tag{3.9}$$

Из (3.9) вытекает, что эффективность оценок (3.4), (3.7) не превосходит единицы.

В заключение этого параграфа рассмотрим пример, в котором независимые наблюдения Y_i представляют собой сумму «сигнала» $m_1(x_0)$ ($m_1(x)$ удовлетворяют условиям теоремы 3.1 и гауссовской случайной величины ξ_i с нулевым средним и не зависящей от параметра дисперсией m_2:

$$Y_i = m_1(x_0) + \xi_i. \tag{3.10}$$

Из (3.6) и (1.13) для этого случая получим утверждение: процедура (3.7) дает асимптотически нормальную и асимптотически эффективную в сильном смысле оценку параметра x_0.

Обсудим теперь условие $|m_1'(x)| \geqslant c > 0$. Оно гарантирует, в частности, строгую монотонность функции $m_1(x)$. Ясно, что при нарушении монотонности $m_1(x)$ может не существовать даже состоятельной оценки параметра. Если, например, $m_1(x_0) = m_1(x_1)$ при $x_0 \neq x_1$, то по наблюдениям (3.10) невозможно различить значения параметров x_0 и x_1. Если все же функция $m_1(x)$ меняется монотонно при достаточно больших значениях $|x|$, то процедура (3.2) сходится к одному из решений уравнения $m_1(x) = m_1(x_0)$ (см. теорему 5.2.1). Пусть теперь функция $m_1(x)$ строго монотонна, но $m_1'(x_0) = 0$. Процедура (3.2) дает в этом случае состоятельную оценку параметра x_0. Однако $I(x_0) = 0$ в силу (1.13). В сочетании с неравенством (1.9) это позволяет заключить, что дисперсия любой оценки сходится в этом случае к нулю медленнее, чем $1/n$. Мы не будем останавливаться на этом подробнее.

Если a priori известно, что $x_0 \in (a, b)$, то естественно воспользоваться одной из усеченных процедур с. а., описанных в §§ 7.1—7.4, для построения оценок. При этом справедливы все результаты настоящего параграфа и, конечно, не нужно требовать каких-либо условий на рост $m_1(x)$, если (a, b) — конечный интервал.

З а д а ч а 3.2. Пусть $Y_1, Y_2, \ldots$ — независимые наблюдения с плотностью $f(y, x_0)$ такой, что $m_1(x) \equiv 0$, $m_2(x)$ монотонно возрастает, но не превосходит $K(1 + x^2)$, и существует $m_4 = \mathsf{M}Y_i^4 < \infty$.

1) Докажите, что процедура

$$X_{n+1} - X_n = a_n (Y_n^2 - m_2(X_n)), \qquad X(0) = \text{const}$$

дает при выполнении условий (3.3) состоятельную в сильном смысле оценку параметра x_0.

2) Пусть известно, что $x_0 \in (a, b)$, причем $a > -\infty$. Пусть, кроме того, $|m_2'(x)| > c > 0$ при $x \in (a, b)$. Докажите, что процедура

$$X_{n+1} = \left[X_n + \frac{Y_{n+1}^2 - m_2(X_n)}{(n+1)\, m_2'(X_n)} \right]_a^b, \qquad X_0 = \text{const}$$

состоятельна в сильном смысле и асимптотически нормальна, а ее асимптотическая дисперсия равна

$$\frac{m_4 - m_2^2(x_0)}{n\,(m_2'(x_0))^2}.$$

3) Проверьте, что эта процедура асимптотически эффективна, если Y_i — гауссовские случайные величины.

§ 4. Асимптотически эффективная рекуррентная процедура

Рассмотренные в предыдущем параграфе процедуры лишь для гауссовских распределений оказывались асимптотически эффективными. Это и не удивительно, так как при построении этих процедур мы пользовались лишь моментами $f(y, x)$ не выше второго. Интересно выяснить, нельзя ли, более полно используя информацию о функции $f(y, x)$, построить асимптотически эффективные рекуррентные процедуры в более широком классе случаев. Оказывается, можно. Этот важный результат мы теперь докажем.

Введем сначала функцию

$$M(x) = \int \ln \frac{f(y, x)}{f(y, x_0)}\, f(y, x_0)\, \nu(dy). \tag{4.1}$$

Эта функция, очевидно, равна нулю при $x = x_0$ и неположительна при всех x. В самом деле, ввиду неравенства $\ln z < z - 1$ при $z \neq 1$ имеем

$$M(x) = \mathsf{M} \ln \frac{f(Y_i, x)}{f(Y_i, x_0)} \leqslant \int f(y, x)\, \nu(dy) - 1 \leqslant 0. \tag{4.2}$$

Таким образом, функция $M(x)$ принимает максимальное значение в точке x_0. Если эта функция к тому же дифференцируема, то $m(x) = M'(x)$ обращается в нуль при $x = x_0$. В нижеследующей теореме предполагается дополнительно, что $M(x)$ изменяется монотонно при $x < x_0$ и $x > x_0$. Будут также сделаны и некоторые другие предположения чисто технического характера.

Теорема 4.1. *Пусть выполнены предположения:*

1. *Функции $f(y, x)$ и $M(x)$ дважды дифференцируемы по x, причем равенства* (4.1) *и*

$$\int f(y, x)\, \nu(dy) = 1 \tag{4.3}$$

можно дважды дифференцировать под знаком интеграла.

2. *При всех* $x \neq x_0$

$$m(x)(x - x_0) < 0. \tag{4.4}$$

3. *Функция*

$$G(x) = I^{-2}(x)\,\mathsf{M}\,[(\ln f(Y_i, x))'_x]^2 = \\ = I^{-2}(x) \int \left(\frac{f'_x(y, x)}{f(y, x)}\right)^2 f(y, x_0)\,\nu(dy)$$

растет не быстрее квадратичной при $|x| \to \infty$.

4. *Интеграл*

$$\int\limits_{\left\{y:\ \left|\frac{f'_x(y, x)}{f(y, x)}\right| > R\right\}} \left(\frac{f'_x(y, x)}{f(y, x)}\right)^2 f(y, x_0)\,\nu(dy) \to 0 \quad \text{при} \quad R \to \infty$$

равномерно по $|x - x_0| < \varepsilon$ $(\varepsilon > 0)$.

5. *Функции* $I(x)$ *и* $G(x)$ *непрерывны и положительны при* $x \in E_1$.

Тогда рекуррентная процедура

$$X_{n+1} - X_n = \frac{1}{(n+1)\,I(X_n)}\,\frac{f'_x(Y_{n+1}, X_n)}{f(Y_{n+1}, X_n)}, \quad X_0 = \text{const}, \tag{4.5}$$

дает сильно состоятельную, асимптотически нормальную и асимптотически эффективную оценку параметра x_0.

Если вместо условия 4 *для некоторых* $\mu > 0$, $k > 0$, $\varepsilon > 0$ *при* $|x - x_0| < \varepsilon$ *выполнено неравенство*

$$\int \left(\frac{f'_x(y, x)}{I(x)\,f(y, x)} - \frac{f'_x(y, x_0)}{I(x_0)\,f(y, x_0)}\right)^2 f(y, x_0)\,\nu(dy) < k\,|x - x_0|^{\mu},$$

то справедливо второе утверждение теоремы 3.1 *с процессом* $X(t)$, *описываемым уравнением* $dX(t) = -\frac{1}{2}X(t)\,dt + I^{-1/2}(x_0)\,d\xi(t)$. *Наконец, если дополнительно при всех* $x \neq x_0$ *для некоторого* $\lambda > 0$ *справедливо неравенство*

$$\frac{m(x)}{I(x)}(x - x_0) < -\lambda (x - x_0)^2$$

и $\mathsf{M}\left|\frac{f'_x(Y_n, x)}{I(x)\,f(Y_n, x)}\right|^{\beta} < k(1 + |x|^{\beta})$ *для четного* $\beta \geqslant 4/\min(2\lambda, 1)$, *то оценка* (4.5) *асимптотически эффективна в сильном смысле.*

Доказательство. Обозначим

$$\Phi(Y_{n+1}, x) = \frac{1}{I(x)} \frac{f'_x(Y_{n+1}, x)}{f(Y_{n+1}, x)}.$$

Очевидно,

$$\mathsf{M}\Phi(Y_{n+1}, x) = \frac{m(x)}{I(x)},$$

$$\mathsf{M}\left[\Phi(Y_{n+1}, x) - \frac{m(x)}{I(x)}\right]^2 \leqslant \mathsf{M}\Phi^2(Y_{n+1}, x) = G(x).$$

Учитывая условия 1 и 3 и применяя теорему 4.1.1, получим состоятельность оценки X_n. Далее, вычисляя производную функции $I^{-1}(x)\, m(x)$ в точке $x = x_0$ с учетом $m(x_0) = 0$ и условия 1, получим

$$\left(\frac{m(x)}{I(x)}\right)'_{x=x_0} = \frac{m'(x_0)}{I(x_0)} = I^{-1}(x_0)\left[\int f''_x(y, x_0)\,\nu(dy) - \right.$$
$$\left. - \int \left(\frac{f'_x(y, x_0)}{f(y, x_0)}\right)^2 f(y, x_0)\,\nu(dy)\right] = -1.$$

Аналогично проверяются и другие условия теоремы 6.6.2, применение которой позволяет сделать вывод о том, что $\sqrt{n}\,(X_n - x_0) \sim \mathfrak{N}(0, \mathsf{M}\Phi^2(Y_i, x_0))$.

Так как $\mathsf{M}\Phi^2(Y_i, x_0) = I(x_0)\cdot I^{-2}(x_0) = I^{-1}(x_0)$, то первая часть теоремы доказана. Второе и третье утверждения теоремы вытекают из теорем 6.6.3 и 6.7.2.

Наиболее существенным из условий теоремы 4.1 является условие (4.4). Если оно не выполнено, то из теорем гл. 5 вытекает, что процедура (4.5) несостоятельна.

Рассмотрим, в частности, задачу оценки параметра сдвига распределения. В этой задаче $\nu(dy) = dy$

$$Y_i = x + \xi_i,$$

где ξ_i — независимые случайные величины с плотностью $f(y)$, а x — неизвестный параметр, причем $f(y, x) = f(y - x)$. Пусть функция $f(y)$ положительна при $y \in E_1$ и дважды дифференцируема и выполнено условие (4.4). Нетрудно видеть, что выполнены и остальные условия 1, 3—5, если

$$I = \int \frac{(f'(y))^2}{f(y)}\,dy < \infty$$

и при некоторых $c_1 > 0$, $c_2 > 0$ справедливо неравенство

$$G(x) = \int \left(\frac{f'(y)}{f(y)}\right)^2 f(y+x)\,dy < c_1 x^2 + c_2,$$

причем последний интеграл сходится равномерно в окрестности каждой точки. Таким образом, при этих условиях процедура

$$X_{n+1} - X_n = \frac{1}{(n+1)\,I} \frac{f'(Y_{n+1} - X_n)}{f(Y_{n+1} - X_n)}$$

приводит к оценке параметра сдвига с асимптотически оптимальными свойствами.

В заключение сделаем два замечания.

Замечание 1. Если a priori известно, что $x_0 \in \in (a, b)$, то можно рассмотреть модифицированную согласно § 7.1 процедуру (4.5). В этом случае условия теоремы 4.1 можно существенно ослабить. Например (см. теорему 7.4.1), можно не требовать выполнения условия 3.

Замечание 2. Можно ослабить условия теоремы 4.1, если вместо процедуры (4.5) рассмотреть процедуру

$$X_{n+1} - X_n = -\frac{1}{I(X_n)} \ln \frac{f(Y_{n+1}, X_n)}{f\left(Y_{n+1}, X_n + \frac{1}{n+1}\right)}. \tag{4.6}$$

Есть некоторые основания надеяться, что соответствующим образом усеченная процедура (4.6) будет асимптотически эффективной при минимальных предположениях. Мы не будем останавливаться на этом подробнее, так как никакие точные результаты в этом направлении нам неизвестны.

§ 5. Оценивание многомерного параметра

В двух предыдущих параграфах рассматривалась задача оценивания одномерного параметра в одномерной же выборке. Представляет интерес задача оценивания параметра $x_0 \in E_k$ в случае, когда наблюдения Y_i принадлежат E_l. При этом, вообще говоря, $l \neq k$. Однако случай $l \neq k$ довольно часто может быть редуцирован к случаю $l = k$ (более подробное обсуждение см. в гл. 9, §§ 2 и 4 в связи с непрерывными во времени наблюдениями). Поэтому ниже будут рассматриваться рекуррентные оценки

l-мерного параметра x_0 по l-мерным же независимым наблюдениям $Y_1, \ldots, Y_n$.

Итак, пусть $Y_1, \ldots, Y_n$, $Y_i \in E_l$ — независимые наблюдения, распределенные с плотностью $f(y, x_0)$ относительно меры $\nu(dy)$, определенной на некоторой σ-алгебре измеримых множеств из E_l; $x_0 \in \mathscr{X} \subset E_l$ — неизвестный параметр. Пусть

$$m_1(x) = \int y f(y, x) \nu(dy),$$

$$m_2(x) = \int (y - m_1(x))(y - m_1(x))^* f(y, x) \nu(dy)$$

— вектор математического ожидания и ковариационная матрица наблюдения Y_i, если значение параметра есть x. Как и выше, символами M, P обозначаются математическое ожидание и вероятность, вычисленные при значении параметра, равном x_0.

Мы рассмотрим сначала, как и в одномерном случае, процедуру оценивания, основанную на методе РМ. При этом для простоты ограничимся случаем $\mathscr{X} = E_l$.

Теорема 5.1. *Пусть выполнены условия*

1. *При всех* $\varepsilon > 0$

$$\sup_{\varepsilon < |x - x_0| < \frac{1}{\varepsilon}} (m_1(x_0) - m_1(x), \ x - x_0) < 0.$$

2. *Функция* $m_1(x)$ *при некоторых* $c_1 > 0$, $c_2 > 0$ *удовлетворяет неравенству*

$$|m_1(x)| < c_1 |x| + c_2. \tag{5.1}$$

3. $\| m_2(x_0) \| < \infty$.

Тогда рекуррентная процедура оценивания

$$X_{n+1} - X_n = a_n (Y_{n+1} - m_1(X_n)), \qquad X_0 = \text{const}, \tag{5.2}$$

состоятельна в сильном смысле для любой последовательности $a_n \geqslant 0$, *для которой*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \infty, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 < \infty. \tag{5.3}$$

Доказательство сводится к проверке условий теоремы 4.4.4, которую мы предоставим читателю.

Теорема 5.2. *Пусть выполнены условия теоремы* 5.1, *а также условия:*

1. $m_1(x_0)-m_1(x)=-\frac{\partial m_1(x_0)}{\partial x}(x-x_0)+\delta(x),$

где $|\delta(x)|=o(|x-x_0|)$ *при* $x\to x_0$.

2. *Матрица* $A=-a\frac{\partial m_1(x_0)}{\partial x}+\frac{1}{2}J$ *устойчива.*

Тогда процедура оценивания

$$X_{n+1}-X_n=\frac{a}{n+1}(Y_{n+1}-m_1(X_n)),\quad X_0=\mathrm{const},\quad (5.4)$$

состоятельна в сильном смысле и асимптотически нормальна, причем

$$\sqrt{n}(X_n-x_0)\sim\mathfrak{N}(0,\ S),$$

где

$$S=a^2\int\limits_0^\infty e^{Av}m_2(x_0)\,e^{A^*v}\,dv.$$

Более того, для любых $k>0$, $t_i>0$, $i=1,2,\ldots,k$, $n<n_1<\ldots<n_k$ *таких, что при* $n\to\infty$

$$\ln\frac{n_i}{n}\to t_i,$$

совместное распределение случайных векторов

$$\sqrt{n}(X_n-x_0),\quad \sqrt{n_1}(X_{n_1}-x_0),\ \ldots,\quad \sqrt{n_k}(X_{n_k}-x_0)$$

сходится при $n\to\infty$ *к совместному распределению случайных векторов* $X(0)$, $X(t_1)$, $\ldots$, $X(t_k)$, *где* $X(t)$ — *гауссовский марковский случайный процесс, удовлетворяющий стохастическому уравнению*

$$dX(t)=AX(t)\,dt+am_2^{1/2}(x_0)\,d\xi(t),$$

$m_2^{1/2}(x_0)$ — *одна из матриц, удовлетворяющих условию* $m_2^{1/2}(x_0)(m_2^{1/2}(x_0))^*=m_2(x_0)$, *а* $\xi(t)=(\xi_1(t),\ldots$ $\ldots,\xi_l(t))^*$, $\xi_i(t)$ — *независимые стандартные винеровские процессы. Если, кроме того, при некотором* $\lambda>0$ *справедливо неравенство*

$$|(m_1(x)-m_1(x_0),x-x_0)|>\lambda|x-x_0|^2$$

и $\mathsf{M}\,|Y_n|^\beta \geqslant \infty$ *для четного* $\beta \geqslant 4/\min(2a\lambda, 1)$, *то*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}\,\mathsf{M}(X_n - x_0) = 0, \qquad \lim_{n\to\infty} n\mathsf{M}(X_n - x_0)(X_n - x_0)^* = S.$$

Доказательство вытекает из теорем 6.6.1, 6.6.3, 6.7.2.

Так же, как и в одномерном случае, можно улучшить процедуру (5.4), рассмотрев «адаптивную» процедуру оценивания

$$X_{n+1} - X_n = \frac{1}{n+1}\left(\frac{\partial m_1(X_n)}{\partial x}\right)^{-1}\{Y_{n+1} - m_1(X_n)\}, \quad (5.5)$$
$$X_0 = \text{const}.$$

Теорема 5.3. *Пусть* $\|m_2(x_0)\| < \infty$, *матрица* $\partial m_1/\partial x$ *непрерывно дифференцируема при всех* $x \in E_l$, *а ее определитель* $\left|\frac{\partial m_1}{\partial x}\right|$ *удовлетворяет условию*

$$\infty > C > \left|\frac{\partial m_1}{\partial x}\right| > c > 0 \quad \textit{для} \quad x \in E_l.$$

Предположим также, что при всех $x \neq x_0$ *выполнено неравенство*

$$\left(\left(\frac{\partial m_1(x)}{\partial x}\right)^{-1}(m_1(x_0) - m_1(x)),\ x - x_0\right) < 0.$$

Тогда процедура (5.10) *состоятельна в сильном смысле и асимптотически нормальна, причем*

$$\sqrt{n}(X_n - x_0) \sim \mathfrak{N}\left(0,\ \left(\frac{\partial m_1(x_0)}{\partial x}\right)^{-1} m_2(x_0)\left(\frac{\partial m_1(x_0)}{\partial x}\right)^{*-1}\right).$$

Доказательство теоремы сводится к применению теоремы 6.6.1. Заметим, что в данном случае

$$a = 1,\ R(x) = \left(\frac{\partial m_1(x)}{\partial x}\right)^{-1}(m_1(x_0) - m_1(x)).$$

Отсюда и из условий теоремы убеждаемся в справедливости разложения

$$R(x) = x_0 - x + o(|x - x_0|),\ (x \to x_0).$$

Поэтому, в частности, матрица $-B$ из условия теоремы 6.6.1 единична, а $S = \left(\frac{\partial m_1(x_0)}{\partial x}\right)^{-1} m_2(x_0)\left(\frac{\partial m_1(x_0)}{\partial x}\right)^{*-1}$.

Сопоставляя утверждение теоремы 5.3 с результатом задачи 2.1, убеждаемся, что в случае, когда наблюдения Y_i — гауссовские с не зависящей от параметра ковариационной матрицей, процедура (5.5) дает асимптотически эффективную оценку параметра x_0. В более широком классе случаев асимптотически эффективную оценку позволяет получить другая процедура оценивания, предложенная Сакрисоном [2], [3]. К рассмотрению этой процедуры, представляющей собой обобщение рассмотренной выше процедуры (4.5) на многомерный случай, мы и переходим.

Пусть $f(y, x)$, $y \in E_l$, $x \in E_l$,— плотность распределения относительно меры $\nu(dy)$, так что, в частности,

$$\int f(y, x)\, \nu(dy) = 1.$$

Пусть $I(x)$ — соответствующая плотности $f(y, x)$ информационная матрица Фишера. При некоторых ограничениях мы установим, что рекуррентная процедура

$$X_{n+1} - X_n = \frac{1}{n+1} I^{-1}(X_n) \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(Y_{n+1}, X_n)}{f(Y_{n+1}, X_n)}, \quad X_0 = \text{const}, \tag{5.6}$$

состоятельна в сильном смысле и асимптотически эффективна (здесь $\partial f/\partial x$ — вектор-столбец с координатами $\partial f/\partial x_i$).

Пусть $M(x)$ — функция, определенная согласно (4.1). Как указано в § 4, функция $M(x)$ имеет максимальное значение при $x = x_0$. Будем предполагать, что эта функция дифференцируема, так что вектор $m(x) = \frac{\partial M}{\partial x} = \left(\frac{\partial M}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial M}{\partial x_l}\right)^*$ обращается в нуль при $x = x_0$. Для сходимости процедуры (5.6) необходима, кроме того, некоторая правильность в поведении этого вектора. Перечислим требования, налагаемые в дальнейшем.

I. Выполнено первое из условий теоремы 4.1.

II. Матрица $I(x)$ непрерывна и невырождена при $x \in E_l$.

III. При всех $x \neq x_0$

$$(I^{-1}(x)\, m(x),\; x - x_0) < 0.$$

IV. При всех $x \in E_l$ матрица

$$D(x) = I^{-1}(x) \mathsf{M}\left[\left(\frac{\partial f(Y_i, x)}{\partial x} - m(x) \right) \times \right.$$

$$\left. \times \left(\frac{\partial f(Y_i, x)}{\partial x} - m(x) \right)^* \right] I^{-1}(x)$$

непрерывна и удовлетворяет условию

$$\| D(x) \| \leqslant c_1 + c_2 \, | x |^2.$$

V. Равномерно по $| x - x_0 | < \varepsilon \ (\varepsilon > 0)$ сходится к нулю при $R \to \infty$ интеграл

$$\int\limits_{\left\{y: \left| \frac{\partial f(y, x)}{\partial x} \right| > R f(y, x)\right\}} \left| \frac{\partial f(y, x)}{\partial x} \right|^2 \frac{f(y, x_0) \, \nu(dy)}{f^2(y, x)}.$$

VI. При некоторых $\mu > 0$, $k > 0$, $\varepsilon > 0$ в области $| x - x_0 | < \varepsilon$ справедливо неравенство

$$\int \left| \frac{I^{-1}(x) \frac{\partial f}{\partial x}(y, x)}{f(y, x)} - \frac{I^{-1}(x_0) \frac{\partial f}{\partial x}(y, x_0)}{f(y, x_0)} \right|^2 f(y, x_0) \, \nu(dy) < k |x - x_0|^{\mu}.$$

VII. Для некоторого $\lambda > 0$ при $x \in E_l$

$$(I^{-1}(x) \, m(x), \, x - x_0) < -\lambda \, | x - x_0 |^2,$$

причем

$$\mathsf{M} \left| I^{-1}(x) \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(Y_{n+1}, x)}{f(Y_{n+1}, x)} \right|^{\beta} < k (1 + | x |^{\beta})$$

для четного $\beta > 4/\min(2\lambda, 1)$.

Теорема 5.4. *Пусть выполнены условия* I—V. *Тогда процедура* (5.6) *дает состоятельную в сильном смысле, асимптотически нормальную и асимптотически эффективную оценку параметра* x_0. *Если выполнены условия* I—IV *и* VI, *то при любых* $k > 0$, $t_i > 0$, $i = 1, \ldots, k$, $n < n_1 < \ldots < n_k$ *таких, что* $\ln \frac{n_i}{n} \to t_i$ *при* $n \to \infty$, *совместное распределение случайных величин*

$$\sqrt{n}\,(X_n - x_0), \ \sqrt{n_1}\,(X_{n_1} - x_0), \ \ldots, \ \sqrt{n_k}\,(X_{n_k} - x_0)$$

сходится при $n \to \infty$ *к совместному распределению случайных величин* $X(0), X(t_1), \ldots, X(t_k)$, *где* $X(t)$ — *гаус-*

совский марковский стационарный процесс, определяемый стохастическим уравнением

$$dX(t) = -\frac{1}{2} X(t)\,dt + I^{-1/2}(x_0)\,d\xi(t)$$

($I^{-1/2}(x_0)$ — *положительно определенный квадратный корень из матрицы* $I^{-1}(x_0)$, $\xi(t) = (\xi_1(t), \ldots, \xi_l(t))^*$; $\xi_i(t)$, $i = 1, \ldots, l$ — *независимые стандартные винеровские процессы.*) *Если, наконец, выполнены условия* I — IV *и* VII, *то процедура* (5.6) *асимптотически эффективна в сильном смысле.*

Доказательство этой теоремы почти не отличается от доказательства теоремы 4.1 и может быть предоставлено читателю.

Отметим в заключение, что мы лишь для простоты считаем, что распределение Y_i не зависит от i. Рекуррентные оценки высокой эффективности можно строить и в том случае, когда распределение наблюдений зависит от времени. Для непрерывного времени соответствующие результаты приведены в следующей главе.

§ 6. Задача оценивания при зависимых наблюдениях

Откажемся теперь на время от предположения о независимости наблюдений $Y^{(n)} = \{Y_1, \ldots, Y_n\}$. Пусть $f_n(\mathcal{Y}^{(n)}, x_0)$ (здесь $\mathcal{Y}^{(n)} = (y_1, \ldots, y_n)$) — совместная плотность распределения вектора $Y^{(n)}$ относительно меры $\nu(dy_1) \times \ldots \times \nu(dy_n)$, а x_0, по-прежнему, обозначает неизвестное наблюдателю значение одномерного, для простоты, параметра, $x_0 \in \mathcal{X} \subset E_1$.

Пусть $f^{(i)}(y_i/\mathcal{Y}^{(i-1)}, x)$, $i = 1, \ldots, n$, — условная плотность i-го наблюдения при условии $Y_1 = y_1, \ldots, Y_{i-1} = y_{i-1}$ и значении параметра, равном x. Тогда

$$f_n(\mathcal{Y}^{(n)}, x) = \prod_{i=1}^{n} f^{(i)}(y_i/\mathcal{Y}^{(i-1)}, x), \tag{6.1}$$

$$\int f^{(i)}(y_i/\mathcal{Y}^{(i-1)}, x)\,\nu(dy_i) = 1. \tag{6.1'}$$

(Здесь принято обозначение $f^{(1)}(y_1/\mathcal{Y}^{(0)}, x) = f(y_1/x)$ для плотности распределения наблюдения Y_1, если значение параметра есть x). Будем обозначать, как и раньше, M_x, P_x вероятность и математическое ожидание, связанные с плотностью $f_n(\mathcal{Y}^{(n)}, x)$. Задача оценивания в этой ситуации снова состоит в том, чтобы построить функцию $x_n = x_n(Y_1, \ldots, Y_n)$, в некотором смысле близкую к x_0

Пусть $Y_i \in E_l$, тогда $Y^{(n)}$ можно рассматривать как одно наблюдение в E_{ln}. Если к тому же функция $f_n(\mathcal{Y}^{(n)}, x)$ удовлетворяет условиям теоремы 1.1, то для любой несмещенной оценки x_n параметра x справедливо неравенство

$$S_n(x) \geqslant I_n^{-1}(x), \tag{6.2}$$

где $I_n(x)$ — информационное количество плотности $f_n(\mathcal{Y}^{(n)}, x)$. При некоторых предположениях типа возможности дифференцирования некоторых тождеств под знаком интеграла по x (см. доказательство теоремы 1.1) из (6.2) можно вывести неравенство, в которое входят уже лишь информационные количества каждой из плотностей $f^{(i)}$.

Мы изберем другой способ изложения, примыкающий к теореме 1.2. Обозначим $\nu_i(d\mathcal{Y}^{(i)}) = \nu(dy_1) \ldots \nu(dy_i)$.

Теорема 6.1. *Пусть функции $f^{(i)}(y_i/\mathcal{Y}^{(i-1)}, x)$, $i = 1, \ldots, n$, абсолютно непрерывны по x для почти всех $y_1, \ldots, y_i$, а функции*

$$I_i(x, \mathcal{Y}^{(i-1)}) = \int \frac{\left(\dfrac{\partial f^{(i)}(y_i/\mathcal{Y}^{(i-1)}, x)}{\partial x}\right)^2}{f^{(i)}(y_i/\mathcal{Y}^{(i-1)}, x)} \nu(dy_i), \quad i = 1, \ldots, n,$$

интегрируемы по мере $f_{i-1}(\mathcal{Y}^{(i-1)}, x_1)\,\nu_{i-1}(d\mathcal{Y}^{(i-1)})$, если $|x - x_0|$ достаточно мало и, более того, функции двух переменных $\mathsf{M}_x I_i(u, Y^{(i-1)})$ непрерывны на прямой $x = u$. Тогда в любой точке непрерывности функции $S_n(x) = \mathsf{M}_x(x_n - x)^2$ для любой несмещенной оценки x_n параметра x справедливо неравенство

$$S_n(x) \geqslant \left[\mathsf{M}_x \sum_{i=1}^{n} I_i(x, Y^{(i-1)})\right]^{-1}. \tag{6.3}$$

Доказательство. Прежде всего заметим, что можно снова воспользоваться неравенством (1.6). Поэтому достаточно найти оценку сверху для выражения

$$K_n = \int \left(\sqrt{f_n(\mathcal{Y}^{(n)}, x+\Delta)} - \sqrt{f_n(\mathcal{Y}^{(n)}, x)}\right)^2 \nu_n(d\mathcal{Y}^{(n)}).$$

Обозначим для краткости

$$a_i = \sqrt{f^{(i)}(y_i/\mathcal{Y}^{(i-1)}, x)}, \quad b_i = \sqrt{f^{(i)}(y_i/\mathcal{Y}^{(i-1)}, x+\Delta)}.$$

Из (6.1) получим при $n > 1$

$$K_n = 2 - 2\int \sqrt{f_n(\mathcal{Y}^{(n)}, x+\Delta) f_n(\mathcal{Y}^{(n)}, x)}\, \nu_n(d\mathcal{Y}^{(n)}) =$$

$$= 2 - 2\int \prod_{i=1}^{n} a_i b_i \nu_n(d\mathcal{Y}^{(n)}) = 2 - 2\int \prod_{i=1}^{n-1} a_i b_i \nu_{n-1}(d\mathcal{Y}^{(n-1)}) +$$

$$+ \int \prod_{i=1}^{n-1} a_i b_i (a_n - b_n)^2 \nu_n(d\mathcal{Y}^{(n)}) \leqslant$$

$$\leqslant K_{n-1} + \frac{1}{2}(\mathsf{M}_x + \mathsf{M}_{x+\Delta}) \int \Big(\sqrt{f^{(n)}(y_n/Y^{(n-1)}, x+\Delta)} -$$

$$- \sqrt{f^{(n)}(y_x/Y^{(n-1)}, x)}\Big)^2 \nu(dy_n).$$

Отсюда и из (1.10) вытекает неравенство

$$K_n \leqslant K_{n-1} + \frac{\Delta}{8} \int_x^{x+\Delta} [\mathsf{M}_x I_n(u, Y^{(n-1)}) +$$

$$+ \mathsf{M}_{x+\Delta} I_n(u, Y^{(n-1)})]\, du.$$

Итерируя это неравенство, приходим к оценке

$$K_n \leqslant \frac{\Delta}{4} \int_x^{x+\Delta} \Big[I_1(u) + \frac{1}{2} \sum_{i=2}^{n} (\mathsf{M}_x I_i(u, Y^{(i-1)}) +$$

$$+ \mathsf{M}_{x+\Delta} I_i(u, Y^{(i-1)}))\Big]\, du. \qquad (6.4)$$

Из (6.4) и (1.6), поделив на Δ^2 обе части неравенства (1.6) и переходя к пределу при $\Delta \to 0$, получаем с помощью последнего условия теоремы оценку (6.3). Теорема доказана.

Вполне аналогично можно установить и матричный вариант неравенства Крамера — Рао для рассматриваемого случая. Он по-прежнему имеет вид (6.3), но левая и правая часть (6.3), конечно, представляют собой матрицы. Предоставляем читателю по аналогии с § 2 определить эти матрицы и, воспользовавшись методом доказательства теорем 2.1 и 6.1, получить при соответствующих ограничениях неравенство (6.3) для матричного случая.

Рассмотрим один пример применения неравенства (6.3).

Пусть $f^{(i)}(y_i/\mathcal{Y}^{(i-1)}, x) \equiv f^{(i)}(y_i/y_{i-1}, x)$. При этом условии наблюдения $Y_1, \ldots, Y_n$ связаны в цепь Маркова (см. гл. 2), причем

$$f^{(i)}(y_1/y_{n-1}, x) = p(i-1, y_{i-1}, i, y_i, x)$$

при $i \geqslant 2$ представляет собой переходную плотность этой цепи, а $f^{(1)}(y_1/x) = p(y_1, x)$ — плотность начального распределения. Неравенство (6.3) для оценки параметра цепи Маркова имеет, таким образом, вид

$$S_n(x) \geqslant \left[\mathsf{M}_x\left(I_1(x) + \sum_{i=2}^{n} I_i(x, Y_{i-1})\right)\right]^{-1}, \tag{6.5}$$

где $I_i(x, y)$ — информационное количество переходной плотности за $(i-1)$-й шаг, а $I_1(x)$ — информационное количество плотности начального распределения. Пусть, например, при любом $x \in \mathcal{X}$ цепь эргодична и однородна по времени, причем

$$\widetilde{I}(x) = \int \widetilde{p}(y, x)\, I(x, y)\, \nu(dy) < \infty$$

($\widetilde{p}(y, x)$ — плотность стационарного распределения). Тогда из закона больших чисел и (6.5) вытекает при $n \to \infty$ неравенство

$$S_n(x) \geqslant \frac{1}{n\widetilde{I}(x)} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Оценку x_n в этом случае естественно назвать асимптотически эффективной, если при $n \to \infty$

$$\sqrt{n}(x_n - x_0) \sim \mathfrak{N}(0, \widetilde{I}^{-1}(x_0)).$$

По-видимому, в широком классе случаев можно построить асимптотически эффективную в этом смысле рекуррентную оценку параметра x_0. Рассмотрение этого вопроса выходит за рамки данной книги.

Другой пример применения неравенства (6.3) будет приведен в гл. X.

Задача 6.1. Воспользовавшись неравенством

$$\int \left(\sqrt{f_n(\mathcal{Y}^{(n)}, x+\Delta)} - \sqrt{f_n(\mathcal{Y}^{(n)}, x)}\right)^2 \nu_n(d\mathcal{Y}^{(n)}) \leqslant$$

$$\leqslant \Delta \int_x^{x+\Delta} du \int \frac{\left(\frac{\partial}{\partial u} f_n(\mathcal{Y}^{(n)}, u)\right)^2}{f_n(\mathcal{Y}^{(n)}, u)} \nu_n(d\mathcal{Y}^{(n)}),$$

покажите справедливость утверждения теоремы 6.1 при следующих предположениях:

1) Функции $f^{(i)}(y_i/\mathcal{Y}^{(i-1)}, x)$ абсолютно непрерывны по x для почти всех $\mathcal{Y}^{(i)}$, $i = 1, \ldots, n$.

2) Функции $\mathsf{M}_x I_i(x, Y^{(i-1)})$, $i = 1, \ldots, n$, непрерывны по x.

3) При $i = 2, \ldots, n$ равенство (6.1′) можно дифференцировать под знаком интеграла.

ГЛАВА 9

РЕКУРРЕНТНОЕ ОЦЕНИВАНИЕ
(непрерывное время)

Рассмотренные в гл. 8 применения процедур с. а. к оцениванию переносятся на непрерывное время. Особое внимание уделяется случаю, когда наблюдения зависят от времени. В этом случае также удается получить асимптотически эффективные рекуррентные процедуры оценивания. Рассматриваются, кроме того, некоторые приложения рекуррентного оценивания к задачам теории информации

§ 1. Неравенство Крамера — Рао

В ряде задач теории автоматического регулирования, теории информации и смежных областей необходимо оценивать параметр сигнала при непрерывных наблюдениях. Мы рассмотрим здесь лишь случай, когда «шум» — гауссовский белый и установим сначала границу снизу для среднего квадратического отклонения оценки параметра от его истинного значения.

Итак, пусть процесс наблюдения $Y(t)$ со значениями в E_1 имеет стохастический дифференциал, причем

$$dY(t) = m(t, Y^t, x_0)\,dt + \sigma(t, Y^t, x_0)\,d\xi(t). \qquad (1.1)$$

Здесь $\xi(t)$ — стандартный винеровский процесс, m, σ — функционалы от прошлого течения процесса $Y^t = (Y(s), s \leqslant t))$ зависящие, кроме того, от неизвестного статистику параметра x_0.

Чтобы получить аналог неравенства (8.6.3) в этой ситуации, рассмотрим сначала конечно-разностную схему

$$Y_\Delta(t_{i+1}) - Y_\Delta(t_i) = \Delta Y_\Delta(t_i) =$$
$$= m(t_i, Y_\Delta^{t_i}, x_0)\,\Delta t + \sigma(t_i, Y_\Delta^{t_i}, x_0)\,\Delta\xi(t_i). \qquad (1.2)$$

Здесь $Y_\Delta(t_i)$ — наблюдения в отстоящих на расстоянии Δt точках $0, t_1, t_2, \ldots, t_n = n\Delta t$, $\Delta\xi(t_i)$ — гауссовские независимые случайные величины с параметрами $(0, \Delta t)$, $Y_\Delta^{t_i} = \{Y_\Delta(0), Y_\Delta(t_1), \ldots, Y_\Delta(t_i)\}$.

В обозначениях § 8.6 имеем для данного случая

$$f_n(\mathcal{Y}_\Delta^{t_n}, x) = \prod_{i=1}^{n} f^{(i)}(\Delta y(t_i)/(\mathcal{Y}_\Delta^{t_{i-1}}, x),$$

$$f^{(i)}(\Delta y(t_i)/\mathcal{Y}_\Delta^{t_{i-1}}, x) = (2\pi\sigma^2(t_{i-1}, \mathcal{Y}_\Delta^{t_{i-1}}, x)\,\Delta t)^{-1/2} \times \\ \times \exp\left\{-\frac{(\Delta y(t_i) - m(t_{i-1}, \mathcal{Y}_\Delta^{t_{i-1}}, x)\,\Delta t)^2}{2\sigma^2(t_{i-1}, \mathcal{Y}_\Delta^{t_{i-1}}, x)\,\Delta t}\right\}.$$

Отсюда и из (8.1.13) вытекает, что соответствующее плотности $f^{(i)}$ информационное количество $I_\Delta(t_i, x, \mathcal{Y}_\Delta^{t_{i-1}})$ имеет вид

$$I_\Delta(t_i, x, \mathcal{Y}_\Delta^{t_{i-1}}) = \frac{(\sigma_x'(t_{i-1}, \mathcal{Y}_\Delta^{t_{i-1}}, x))^2}{2\sigma^2(t_{i-1}, \mathcal{Y}_\Delta^{t_{i-1}}, x)} + \frac{(m_x'(t_{i-1}, \mathcal{Y}_\Delta^{t_{i-1}}, x))^2}{\sigma^2(t_{i-1}, \mathcal{Y}_\Delta^{t_{i-1}}, x)}\Delta t.$$

Применяя теорему 8.6.1, получим следующий результат:

$$S_n^\Delta(x) = \mathsf{M}_x(X_n^\Delta - x)^2 \geqslant \left[\mathsf{M}_x \sum_{i=1}^{n} \left\{\frac{(\sigma_x'(t_{i-1}, Y_\Delta^{t_{i-1}}, x))^2}{2\sigma^2(t_{i-1}, Y_\Delta^{t_{i-1}}, x)} + \right.\right. \\ \left.\left. + \sum_{i=1}^{n} \frac{(m_x'(t_{i-1}, Y_\Delta^{t_{i-1}}, x))^2}{\sigma^2(t_{i-1}, Y_\Delta^{t_{i-1}}, x)}\Delta t\right\}\right]^{-1}. \qquad (1.3)$$

Здесь X_n^Δ — любая несмещенная оценка параметра x, основанная на наблюдениях $Y_\Delta(t_1), \ldots, Y_\Delta(t_n)$, удовлетворяющая условиям теоремы 8.6.1.

Пусть теперь $\Delta t \to 0$, $n\Delta t = t$. Естественно предположить, что дисперсия оценки $X(t)$, основанной на наблюдении процесса $Y(t)$, будет ограничена снизу пределом выражения в правой части неравенства (1.3). Однако здесь мы сталкиваемся с трудностью, так как при $n \to \infty$ это выражение, вообще говоря, стремится к нулю (первая сумма содержит n положительных слагаемых, каждое из которых, вообще говоря, не мало). Это не случайно. Коэффициент σ^2 и на самом деле может быть все более точно оценен по наблюдениям, если они производятся через стремящиеся к нулю интервалы времени, так как хорошо известно, что для предельного процесса с непрерывным временем коэффициент σ^2 может быть оценен точно по наблюдениям на сколь угодно коротком интервале времени. Математически это выражается в том факте, что меры в пространстве функций, соответствующие процессам, определяемым стохастическими уравнениями с разными $\sigma(t, Y^t, x_0)$, сингулярны. Если же $\sigma(t, Y^t, x_0)$ известно, то (в случае обратимости этой функции) можно найти и параметр x_0.

По этой причине в дальнейшем мы будем считать $\sigma(t, Y^t)$ не зависящим от параметра, и вместо уравнения (1.1) рассматривать уравнение

$$dY(t) = m(t, Y^t, x_0)\,dt + \sigma(t, Y^t)\,d\xi(t), \quad Y(0) = 0. \tag{1.4}$$

В этом случае, формально переходя к пределу в (1.3), получим оценку

$$S(t, x) = \mathsf{M}_x (X(t) - x)^2 \geqslant \left(\mathsf{M}_x \int_0^t \frac{(m'_x(s, Y^s, x))^2}{\sigma^2(s, Y^s)}\,ds\right)^{-1}. \tag{1.5}$$

При некоторых ограничениях на m и σ неравенство (1.5) действительно можно доказать для несмещенной оценки $X(t)$, измеримой относительно σ-алгебры $\mathcal{N}_t$ событий, порожденных событиями $Y(s) \in A$, $A \in \mathfrak{B}_1$, $0 \leqslant s \leqslant t$. Для этого нужно фактически повторить рассуждения доказательства теоремы 1.1. Однако при этом необходимо пользоваться абсолютной непрерывностью мер процессов, отвечающих (1.5) при разных коэффициентах сноса m, и выражениями для плотности одной меры по другой. Подробности см. в работе Липцера и Ширяева [2].

Аналогичный результат можно получить и для многомерного наблюдения

$$dY(t) = m(t, Y^t, x_0)\,dt + \sum_{r=1}^{k} \sigma_r(t, Y^t)\,d\xi_r(t), \qquad Y(0) = 0, \tag{1.6}$$

где m, Y, σ_r — векторы из E_l, $\xi_r(t)$ — независимые винеровские процессы. Обозначим σ матрицу, столбцами которой служат векторы σ_r, $r = 1, \ldots, k$, и положим $S_0(t, Y^l) = \sigma(t, Y^l)\,\sigma^*(t, Y^l)$. Тогда (ср. с (8.2.9)) при некоторых предположениях о m и σ_r для любой несмещенной $\mathcal{N}_t$-измеримой оценки $X(t)$ параметра x_0 справедливо матричное неравенство

$$S(t, x) = \mathsf{M}_x (X(t) - x)(X(t) - x)^* \geqslant \geqslant \left(\mathsf{M}_x \int_0^t \frac{\partial m^*}{\partial x} S_0^{-1} \frac{\partial m}{\partial x}\,ds\right)^{-1}. \tag{1.7}$$

Как обычно, мы обозначаем $\mathcal{F}_t$ σ-алгебру событий, связанную с винеровскими процессами $\xi_r(t)$, как это указано на стр. 79.

Вообще говоря, в данном случае вложение $\mathcal{N}_t \subset \mathcal{F}_t$ не очевидно, так как может оказаться, что решение уравнения (1.6) неединственно. При широких условиях на функционалы m и σ (см. Ито и Нисио [1]) это решение тем не менее единственно и потому $\mathcal{N}_t \subset \mathcal{F}_t$. В дальнейшем мы всегда будем предполагать, что это вложение имеет место. Таким образом, любая оценка $X(t)$ $\mathcal{F}_t$-измерима.

Самой простой является ситуация, когда m и σ не зависят от прошлых наблюдений: $m = m(t, x)$, $\sigma_r = \sigma_r(t)$.

Пусть J — единичная матрица в $l \times l$. В соответствии с §§ 8.1, 8.2 оценку $X(t)$ назовем в этом случае *асимптотически эффективной в сильном смысле*, если

$$\lim_{t\to\infty}\left[S(t, x)\int_0^t \frac{\partial m^*(s, x)}{\partial x} S_0^{-1}(s)\,\frac{\partial m(s, x)}{\partial x}\,ds\right] = J, \tag{1.8}$$

и *асимптотически эффективной*, если $X(t)$ асимптотически нормальна с матрицей ковариаций $S(t, x)$, удовлетворяющей условию (1.8).

В частности, если $m(t, x) = m(t)\,x$, где $m(t)$ — матрица $l \times l$, т. е. коэффициент сноса зависит от параметра линейно, то оценка будет асимптотически эффективной, если

$$\lim_{t\to\infty}\left[S(t, x)\int_0^t m^*(s)\,S_0^{-1}(s)\,m(s)\,ds\right] = J. \tag{1.9}$$

§ 2. Применение процедуры Роббинса — Монро

Пусть $t \geqslant 0$, $x \in E_l$, $m(t, x)$, Y — векторы из E_l, $\sigma(t)$ — матрица $l \times l$, а $\xi(t)$ — вектор, компоненты которого суть независимые винеровские процессы. Предположим, что процесс наблюдения $Y(t)$ имеет стохастический дифференциал, причем

$$dY(t) = m(t, x_0)\,dt + \sigma(t)\,d\xi(t). \tag{2.1}$$

Требуется найти оценку l-мерного параметра [1] x_0 по наблюдениям $Y(t)$ на отрезке времени $[0, T]$.

По аналогии с § 8.3 оценку $X(t)$ назовем *рекуррентной*, если она имеет стохастический дифференциал, причем [2]

$$dX(t) = \alpha(t, X(t))\,dY(t) + \beta(t, X(t))\,dt \tag{2.2}$$

для некоторой матрицы $\alpha(t, x)$ и вектора $\beta(t, x)$.

Очевидно, что в случае наблюдаемого процесса вида (2.1) рекуррентная оценка образует марковский процесс. Как и выше, мы будем для простоты рассматривать такие оценки при детерминированном начальном условии $X(0)$.

Если матрица σ и вектор m не зависят от t, то асимптотически эффективная оценка параметра x_0 часто может быть получена с помощью процедуры РМ аналогично § 8.4. А именно, рассмотрим случай, когда наблюдаемый

---

[1]) Если размерность l вектора $Y(t)$ меньше размерности k параметра, то состоятельной оценки, вообще говоря, не существует. Если, например, $m(t, x_0) = m(x_0)$, то из (2.1) можно определить, самое большее, компоненты m_i вектора $m(x_0)$. Однако система $m_i(x_0) = m_i$ $(i = 1, \ldots, l)$ содержит неизвестных больше, чем уравнений. Если же $l > k$, то задача сводится к случаю $l = k$ при более длинном интервале наблюдений. Например, пусть $l = 2$, $k = 1$. Тогда можно считать, что наблюдается одна «составная» функция на отрезке времени $[0, 2T]$. Аналогичная редукция возможна и при $k > l$ в тех случаях, когда состоятельная оценка x_0 все же существует (см. § 4).

[2]) При вычислении оценки (2.2) приходится иметь дело с интегралом $\int\limits_a^t \varphi(s)\,dY(s)$, где $Y(s)$ — процесс, определенный согласно (2.1). Такой интеграл может быть определен в точности так же, как стохастический интеграл по винеровскому процессу в § 3.3, предельным переходом от ступенчатых $\mathcal{N}_s$-измеримых функций $\varphi(s)$.

процесс $Y(t)$ имеет стохастический дифференциал

$$dY(t) = m(x_0)\,dt + \sigma\,d\xi(t), \tag{2.3}$$

где матрица $\frac{\partial m(x)}{\partial x} = \left(\left(\frac{\partial m_i(x)}{\partial x_j}\right)\right)$ невырождена, и рассмотрим процедуру оценивания

$$dX(t) = \frac{1}{t+1}\left[\frac{\partial m}{\partial x}(X(t))\right]^{-1}[dY(t) - m(X(t))\,dt]. \tag{2.4}$$

С учетом (2.3) получим[1])

$$dX(t) = \frac{1}{t+1}\left[\frac{\partial m}{\partial x}(X(t))\right]^{-1}\{(m(x_0) - m(X(t)))\,dt + \sigma\,d\xi(t)\}. \tag{2.5}$$

Предположим, что выполнены условия, гарантирующие сходимость к x_0 при $t \to \infty$ решения уравнения (2.5), отвечающего детерминированному начальному условию $X(0)$, и, кроме того, матрица $\partial m(x)/\partial x$ удовлетворяет условию Гёльдера в окрестности точки x_0, т. е. для некоторых $\varepsilon > 0$, $\gamma > 0$

$$\left\|\frac{\partial m(x_2)}{\partial x} - \frac{\partial m(x_1)}{\partial x}\right\| \leqslant |x_2 - x_1|^{\gamma}, \quad x_i \in U_\varepsilon(x_0).$$

Тогда, применяя теорему 6.5.3, получим, что при соответствующей нормировке процесс $X(t)$ близок к гауссовскому марковскому процессу и, в частности, при $t \to \infty$

$$\sqrt{t}\,(X(t) - x_0) \sim \mathfrak{N}\left(0,\ \left[\frac{\partial m}{\partial x}(x_0)\right]^{-1}\sigma\sigma^*\left[\frac{\partial m^*}{\partial x}(x_0)\right]^{-1}\right).$$

В силу (1.8) это означает асимптотическую эффективность оценки $X(t)$. Заметим теперь, что достаточные условия для сходимости $X(t) \to x_0$ при $t \to \infty$ можно получить из результатов гл. 4. Например, в одномерном случае ($l = 1$) для этого достаточно (см. теорему 4.4.2), чтобы функция $\partial m/\partial x$ не обращалась в нуль и была непрерывно

---

[1]) Здесь и далее мы пользуемся равенством

$$\int_a^t \varphi(s)\,dY(s) = \int_a^t \varphi(s)\,(m\,dS + \sigma\,d\xi(s)).$$

Это равенство очевидно для ступенчатых $\mathcal{N}_s$-измеримых функций. Отсюда и из включения $\mathcal{N}_s \subset \mathcal{F}_s$ вытекает его справедливость и для любой интегрируемой с квадратом $\mathcal{N}_t$-измеримой функции $\varphi(s)$.

дифференцируема. В многомерном же случае (см. теорему 4.4.1) условия сходимости несколько более ограничительны и включают, в частности, некоторые требования не слишком быстрого роста $|m(x)|$ при $|x| \to \infty$. Однако при наличии априорной информации $x_0 \in B$ (B — область с компактным замыканием) можно применить «урезанную» модификацию процедуры (2.4) (см. гл. 7). Эта процедура будет состоятельна и асимптотически эффективна при довольно слабых ограничениях.

Задача 2.1. Проверьте, что при $m(x) = x$ процедура (2.4) с заменой множителя $1/(t+1)$ множителем $1/t$ эффективна и представляет собой гауссовский марковский процесс.

Замечание. Результат последней задачи позволяет построить оценку x_0, состоятельную и асимптотически эффективную во всех случаях, когда матрица $\partial m/\partial x$ невырождена. Для этого нужно построить сначала эффективную оценку $\bar{m}(t)$ параметра $m(x_0)$ (согласно задаче 2.1 такая оценка может быть найдена в рекуррентной форме), а затем найти оценку $\bar{X}(t)$ параметра x_0, решив уравнение

$$m(\bar{X}(t)) = \bar{m}(t).$$

Асимптотическая эффективность оценки $\bar{X}(t)$ вытекает из аналога задачи (8.2.2) для непрерывного времени.

§ 3. Наблюдения, зависящие от времени

Возвратимся к более общему процессу наблюдения (2.1). Можно ли в этой ситуации найти достаточно простые асимптотически эффективные рекуррентные оценки? Ответ на этот вопрос, вообще говоря, положителен. Оказывается, при некоторых условиях рекуррентная оценка

$$dX(t) = [J + B(t, X(t))]^{-1} \times \\ \times \frac{\partial m^*}{\partial x}(t, X(t))\, S_0^{-1}(t)\,(dY(t) - m(t, X(t))\,dt), \qquad (3.1)$$

где

$$B(t, x) = \int_0^t \frac{\partial m^*}{\partial x}(s, x)\, S_0^{-1}(s)\, \frac{\partial m}{\partial x}(s, x)\, ds, \quad S_0(t) = \sigma(t)\,\sigma^*(t),$$

асимптотически эффективна. При этом вместо единичной матрицы J в (3.1) можно использовать любую другую положительно определенную матрицу. Однако процедура (3.1) не является, вообще говоря, процедурой типа с. а. и для ее исследования нельзя воспользоваться теоремами глав IV, VI.

Полное исследование процедуры (3.1) потребовало бы существенного обобщения этих теорем. Мы не будем здесь этим заниматься.

Вместо этого мы подробно исследуем сначала частный случай линейной функции регрессии (функции $m(t, x)$), а затем приведем некоторые эвристические соображения, относящиеся к общему случаю.

Итак, предположим сначала, что

$$m(t, x) = m(t)\, x,$$

где $m(t)$ — матрица $l \times l$. Тогда $\frac{\partial m(t, x)}{\partial x} = m(t)$ и потому

$$B(t, x) \equiv B(t) = \int_0^t m^*(s)\, S_0^{-1}(s)\, m(s)\, ds.$$

Уравнению (3.1) с учетом (2.1) можно в этом случае придать форму

$$dX(t) = (J + B(t))^{-1} m^*(t)\, S_0^{-1}(t)\, [m(t)(x_0 - X(t))\, dt + \sigma(t)\, d\xi(t)]. \qquad (3.2)$$

Из (3.2) с помощью формулы Ито легко получим соотношение

$$d\,[(J + B(t))(X(t) - x_0)] = m^*(t)\, (\sigma^*(t))^{-1}\, d\xi(t). \qquad (3.3)$$

Отсюда вытекает следующее выражение для решения уравнения (3.2) при начальном условии $X(0) = x$:

$$X(t) - x_0 = (J + B(t))^{-1}(x - x_0) + (J + B(t))^{-1} \int_0^t m^*(s)\, \sigma^{*-1}(s)\, d\xi(s). \qquad (3.4)$$

Из этого явного выражения непосредственно вытекает

Теорема 3.1. *Пусть $m(t, x) = m(t)\, x$, матрица $S_0(t) = \sigma(t)\, \sigma^*(t)$ невырождена, а наименьшее собственное* *значение симметричной матрицы*

$$B(t) = \int_0^t m^*(s) S_0^{-1}(s) m(s)\, ds$$

стремится к бесконечности при $t \to \infty$. *Тогда процедура* (3.1) *при любом детерминированном начальном условии представляет собой гауссовский марковский процесс, причем*

$$\mathsf{M}X(t) - x_0 \to 0 \quad \text{при} \quad t \to \infty,$$
$$\lim_{t\to\infty} [\mathsf{M}(X(t) - x_0)(X^*(t) - x_0^*) B(t)] = J. \qquad (3.5)$$

Таким образом, оценка (3.1) *параметра* x_0 *является в этом случае асимптотически несмещенной и асимптотически эффективной в сильном смысле.*

В общем случае оценка (3.1) может даже не быть состоятельной. Если, однако, выполнены условия, гарантирующие ее состоятельность, то правая часть уравнения (3.1) с точностью до малых высшего порядка может быть заменена правой частью уравнения (3.2), где $m(t) = \partial m(t, x_0)/\partial x$. Отсюда при некоторых ограничениях на коэффициенты можно вывести (эта программа в несколько более простой ситуации реализована в теореме 6.6.3), что и процесс $X(t)$ при соответствующей нормировке будет близок к нормированному процессу $X_0(t)$, определяемому линейным уравнением.

Применяя, наконец, теорему 3.1, можно вывести отсюда асимптотическую эффективность (в слабом смысле) процедуры (3.1). Мы не будем здесь останавливаться на этом подробнее.

§ 4. Некоторые приложения

В теории автоматического управления и в теории связи довольно часто приходится решать задачу оценивания для зависящего от времени сигнала. Типичной является, например, следующая задача.

Имеется сигнал $B(t, x)$, который необходимо передать по непрерывному каналу связи с гауссовским белым шумом. Уравнение передачи имеет вид

$$dY(t) = B(t, x_0)\, dt + \sigma\, d\xi(t) \qquad (4.1)$$

(рис. 7).

Задача состоит в том, чтобы по наблюдениям на некотором интервале $[0, T]$ процесса $Y(t)$ (принятого сигнала) построить оценку $X(t)$ параметра x_0.

В теории связи, в частности, рассматривают различные способы модуляции, т. е. различные способы выбора функции $B(t, x)$.

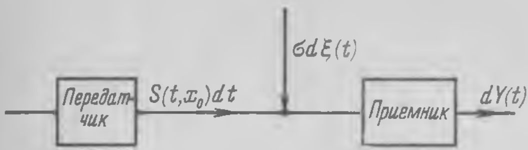

Рис. 7.

Если, например, $B(t, x) = B(t)x$, то это — амплитудная или линейная модуляция, если

$$B(t, x) = A\cos(\omega + x)t$$

(A, ω — заданные числа), то это — импульсная частотная модуляция и т. д. (см., например, Возенкрафт и Джекобс [1], гл. 8.)

Обсуждение в § 3 делает правдоподобной гипотезу, что в широком классе случаев асимптотически (при $T \to \infty$)

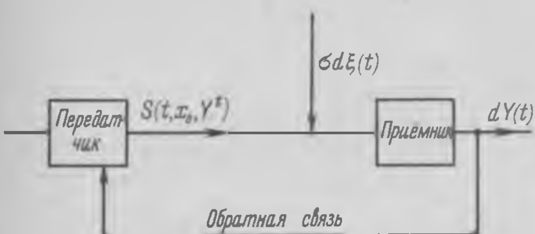

Рис. 8.

минимальной [1]) среднеквадратической ошибки в оценке x_0 можно достичь, используя приемник вида (3.1), значительно более удобный в реализации, чем, скажем, приемник по методу максимального правдоподобия.

Более общая задача возникает при наличии обратной связи (рис. 8). Если обратная связь мгновенная и бесшум-

[1]) Точнее, этот способ приема позволяет получить оценку, асимптотически нормальную с асимптотически наименьшей дисперсией.

ная, то передаваемый сигнал B в момент t можно выбирать зависящим от сигнала, принятого до момента времени t. Математически это означает, что сигнал B в момент времени t является функционалом от траектории $Y(s)$, $0 \leqslant s \leqslant t$. Этот факт условно можно записать так: $B = B(t, x_0, Y^t)$. Конечно, если в выборе модулятора B мы не стеснены никакими ограничениями, то задача оценки x_0 бессодержательна, так как можно выбрать, например, $B = Ax_0$, где A — настолько большая постоянная, что сигнал B «подавит» шум в канале. Естественным физическим ограничением является ограничение на среднюю мощность передаваемого сигнала:

$$\mathsf{M}B^2(t, x_0, Y^t) \leqslant p_{\text{ср}}. \tag{4.2}$$

Кайлат и Шалквийк [1], Зигангиров [1] предложили следующий простой способ выбора модулятора $B(t, x_0, Y^t)$ при таком ограничении:

$$B = \frac{(X(t) - x_0)\sqrt{p_{\text{ср}}}}{D(t)}, \tag{4.3}$$

где $X(t)$ — оценка параметра x_0, выработанная к моменту времени t, $D^2(t) = \mathsf{M}(X(t) - x_0)^2$. Таким образом, предлагается просто передавать разность между оценкой параметра $X(t)$ (известной в силу наличия обратной связи) и его истинным значением x_0, усиленную максимально возможным в соответствии с (4.2) образом. Уравнение передачи имеет вид

$$dY(t) = \frac{X(t) - x_0}{D(t)}\sqrt{p_{\text{ср}}}\,dt + \sigma\,d\xi(t).$$

При таком линейном способе передачи по гауссовскому каналу с белым шумом естественно ожидать, что оптимальную оценку $X(t)$ можно искать в классе рекуррентных оценок. Это действительно так. Будем искать оценку $X(t)$, удовлетворяющую соотношению

$$dX(t) = -k(t)\,dY(t)$$

с неопределенной пока функцией $k(t)$. Таким образом, оценка $X(t)$ удовлетворяет уравнению

$$dX(t) = -\frac{k(t)}{D(t)}(X(t) - x_0)\sqrt{p_{\text{ср}}}\,dt - k(t)\,\sigma\,d\xi(t). \tag{4.4}$$

Отсюда получаем (с помощью формулы Ито), что функция $D^2(t) = \mathsf{M}(X(t) - x_0)^2$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{d}{dt} D^2(t) = -2k(t)\sqrt{p_{\text{ср}}}\, D(t) + k^2(t)\,\sigma^2. \qquad (4.5)$$

До сих пор нам было безразлично, является x_0 неизвестной на приемном конце, но не случайной величиной, или случайной величиной с заданным распределением. Теперь нам удобно будет считать, что x_0 — случайная величина, имеющая конечную дисперсию и не зависящая от процесса $\xi(t)$.

Наша цель — получить оценку с наименьшей дисперсией $D^2(t)$. Легко понять, что для этого нужно выбрать $k(t)$, минимизирующей правую часть (4.5), т. е.

$$k(t) = \frac{\sqrt{p_{\text{ср}}}\, D(t)}{\sigma^2}.$$

При этом значении $k(t)$ из (4.5) находим при $X(0) = \mathsf{M}x_0$

$$D^2(t) = \mathsf{D}x_0 \exp\{-2Ct\}, \quad C = \frac{p_{\text{ср}}}{2\sigma^2} \qquad (4.6)$$

Изучим теперь несколько подробнее структуру оценки $X(t)$. В силу (4.4) и (4.6) она удовлетворяет уравнению

$$dX(t) = -2C(X(t) - x_0)\,dt - (2C)^{1/2} D(0) \exp(-Ct)\, d\xi(t),$$
$$X(0) = \mathsf{M}x_0$$

Поэтому справедливо представление

$$X(t) - x_0 = (\mathsf{M}x_0 - x_0)\exp(-2Ct) + \eta(t) \qquad (4.7)$$

где $\eta(t)$ — не зависящая от x_0 гауссовская случайная величина с нулевым средним, причем $\mathsf{D}\eta(t) = \exp(-2Ct)(1 - \exp(-2Ct))\,\mathsf{D}x_0$.

Покажем теперь, следуя Кайлату и Шалквийку [1], как можно использовать оценку $X(t)$ для передачи цифровой информации с максимальной скоростью. Как обычно, будем считать, что передача ведется со *скоростью* R натуральных единиц, если за время T передается одно из $[\exp\{RT\}]$ равновероятных сообщений. Будем считать для простоты, что $M = \exp(RT)$ — четное число и поставим в соответствие возможным сообщениям номера $-M/2, -M/2 + 1, \ldots, M/2 - 1$. Положим теперь лучайную величину x_0 равной $(2i+1)\,M^{-1}$, если нужно передать сообщение номер i. Таким образом, x_0 — случайная величина, с равными вероятностями принимающая значения в серединах интервалов, делящих отрезок $[-1, 1]$ на M равных частей.

Теперь, зная $X(T)$, принимаем решение о том, что передавалось i-е сообщение, если этому номеру соответствует ближайшее к $X(T)$ возможное значение x_0.

С помощью (4.7) нетрудно оценить вероятность ошибки $P_{\text{ош}}$ при таком методе передачи.

Очевидно

$$P_{\text{ош}} \leqslant \mathsf{P}\left\{|X(T)-x_0| > \frac{1}{2M}\right\} \leqslant \\ \leqslant \mathsf{P}\left\{|x_0 - \mathsf{M}x_0| > \frac{\exp(2CT)}{4M}\right\} + \mathsf{P}\left\{|\eta(T)| > \frac{1}{4M}\right\}$$

Первая из вероятностей в правой части последнего неравенства равна нулю при достаточно большом T, если $R \leqslant C$, а вторая допускает, очевидно, при достаточно больших T и некотором $k > 0$ оценку

$$\mathsf{P}\left\{|\eta(T)| > \frac{1}{4M}\right\} = \\ = \mathsf{P}\left\{\frac{|\eta(T)|}{\sqrt{\mathsf{D}x_0}} \exp(CT) > \frac{\exp(T(C-R))}{4\sqrt{\mathsf{D}x_0}}\right\} \leqslant \\ \leqslant \exp\{-k\exp(2(C-R)T)\}$$

С другой стороны, из основополагающих работ Шеннона (см., например, [1]) хорошо известно, что пропускная способность рассматриваемого канала равна C. Отсюда следует, что рассматриваемый способ передачи обеспечивает передачу со скоростью, сколь угодно близкой к пропускной способности и двойную экспоненту вероятности ошибочного приема.

Аналогичный метод передачи может быть применен и при другом ограничении на входной сигнал. А именно, следуя Дьячкову и Пинскеру [1], рассмотрим снова канал связи (4.1) с мгновенной обратной связью и предположим, что ограничена не средняя мощность в каждый момент времени, а полная энергия передачи на отрезке времени

$[0, T]$, т. е.

$$\int_0^T B^2(t, x_0, Y^t)\,dt \leqslant p_{\text{ср}} T \tag{4.8}$$

В свете только что рассмотренного примера естественно попытаться и в этом случае выбирать передаваемый сигнал в виде

$$B(t) = \frac{\sqrt{p_{\text{ср}}}}{aD(t)}(X(t) - x_0), \tag{4.9}$$

а стохастический дифференциал оценки — в виде

$$dX(t) = -\frac{b\sqrt{p_{\text{ср}}}\,D(t)}{\sigma^2}\,dY(t). \tag{4.10}$$

Здесь a и b — пока неопределенные постоянные, которыми следует распорядиться оптимальным в указанном ниже смысле образом, а $D^2(t)$, как и раньше, есть $\mathsf{M}\,(X(t) - x_0)^2$.

Конечно, метод передачи (4.1), (4.9), (4.10) не удовлетворяет, вообще говоря, ограничению (4.8). Однако можно условиться прекращать передачу всякий раз, когда энергия превзошла уровень $p_{\text{ср}}T$ и считать в этом случае, что сообщение принято неверно. Как будет показано ниже, параметры a и b можно выбрать так, что при больших T вероятность

$$p_1 = \mathsf{P}\left\{\int_0^T B^2(t)\,dt \geqslant p_{\text{ср}}T\right\} \tag{4.11}$$

а значит, и ошибка из-за превышения энергии, будет крайне мала.

Перед исследованием свойств построенного способа передачи необходимо решить две простые задачи.

З а д а ч а 4.1. Покажите, что при передаче (4.1), (4.9), (4.10) функция $D(t)$ удовлетворяет соотношению

$$D(t) = D(0)\exp\left\{-C\left(\frac{2b}{a} - b^2\right)t\right\}, \quad C = \frac{p_{\text{ср}}}{2\sigma^2}. \tag{4.12}$$

З а д а ч а 4.2. Проверьте, что процесс $B(t)$, определенный формулами (4.1), (4.9), (4.10) — марковский и описывается стохастическим уравнением

$$dB(t) = -Cb^2B(t)\,dt - \frac{p_{\text{ср}}b}{a\sigma}\,d\xi(t) \tag{4.13}$$

Отметим теперь такой факт, доказательство которого можно получить методом работы Либкинда [1]: если $Z(t)$ — одномерный гауссовский марковский процесс описываемый уравнением

$$dZ(t) = -\alpha Z(t)\,dt + \beta\,d\xi(t), \qquad Z(0) = z, \qquad \alpha > 0$$

то при $T \to \infty$, $\varkappa > 1$ справедлива асимптотическая формула

$$\ln \mathsf{P}\left\{\int_0^T Z^2(t)\,dt > \frac{\beta^2}{2\alpha}\varkappa T\right\} \sim -\frac{\alpha}{4\varkappa}(\varkappa - 1)^2 T. \tag{4.14}$$

Теперь уже нетрудно подобрать параметры передачи так, чтобы, во-первых, могла быть достигнута скорость передачи, сколь угодно близкая к R, и, во-вторых, вероятность ошибки была асимптотически минимальна. В самом деле, опираясь на построенный выше метод передачи и (4.12), можно гарантировать, что условие

$$\frac{2b}{a} - b^2 = \frac{R}{C} \tag{4.15}$$

обеспечивает скорость передачи, сколь угодно близкую к R.

При этом ясно, что главную часть вероятности ошибки $P_{\text{ош}}$ составляет при больших T число p_1, определенное формулой (4.11).

З а д а ч а 4.3. Из (4.13), (4.14), (4.15) выведите, что для скоростей передачи, сколь угодно близких к R, предел при $T \to \infty$ выражения $-\ln \min\limits_{a,\,b} P_{\text{ош}}/T$ равен максимуму по a, b функции

$$\frac{Cb^2(a^2-1)^2}{4a^2}$$

при условии (4.15). Проверьте, что этот максимум достигается при $a^2 = 2\sqrt{\frac{C}{R}} - 1$, $b^2 = \sqrt{\frac{R}{C}}\left(2 - \sqrt{\frac{R}{C}}\right)$ и равен $(\sqrt{C} - \sqrt{R})^2$.

Указание. Постройте представление процесса $B(t)$, аналогичное представлению (4.7), и воспользуйтесь затем формулой (4.14).

Из результатов Пинскера [1] вытекает, что большей экспоненты вероятности ошибки нельзя получить ни при каком способе передачи. Другое изложение рассмотренных здесь способов передачи читатель может найти в оригинальных статьях Кайлата и Шалквийка [1], Зигангирова [1], Дьячкова и Пинскера [1]. См. также обзор Шалквийка [1], где имеется дальнейшая библиография.

Задача 4.4. Построить аналогичную (4.3), (4.4) процедуру оценивания при наличии обратной связи для дискретного по времени канала, в котором каждому переданному сигналу S_i соответствует принятый сигнал $Y_i = S_i + \xi_i$, ξ_i — независимые одинаково распределенные величины, $\mathsf{M}\xi_i = 0$, $\mathsf{M}\xi_i^2 = \sigma^2$. Докажите, что при соответствующем выборе параметров и ограничении (4.2) справедлива аналогичная (4.6) формула

$$\mathsf{M}(X_n - x_0)^2 = \mathsf{M}(x - x_0)^2 \left(\frac{\sigma^2}{\sigma^2 + p_{\text{ср}}}\right)^n.$$

Следующий пример, который мы рассмотрим несколько менее подробно,— задача оценки неизвестного коэффициента сноса диффузионного процесса.

Предположим, что $f(t) = \sum_{i=1}^{k} \varphi_i(t)\, x_0^i$, где x_0^i, $i = 1, \ldots, k$,— неизвестные наблюдателю параметры, $\varphi_i(t)$ — известные функции со значениями из E_1, а наблюдаемый процесс в E_1 имеет вид

$$dY(t) = f(t)\, dt + \sigma\, d\xi(t). \tag{4.7}$$

Формально к задаче оценки вектора x_0^i с координатами x_0^i неприменимы развитые выше соображения, если $k > 1$. Более того, как указано в примечании на стр. 266, эта задача, вообще говоря, неопределенна. Если, однако, функции $\varphi_i(t)$ удовлетворяют довольно слабому ограничению (см. ниже (4.9)), то вектор x_0 может быть состоятельно оценен.

Чтобы свести эту задачу к рассматривавшимся ранее, разделим интервал наблюдения (скажем, интервал $[0, T]$)

на k равных частей и введем обозначения

$$\Delta = \frac{T}{k}, \quad \varphi_{ji}(t) = \varphi_i(t + j\Delta),$$

$$Y_j(t) = Y(t + j\Delta), \quad \xi_j(t) = \xi(t + j\Delta), \quad j = 0, \ldots, k-1,$$

$$\Phi(t) = ((\varphi_{ji}(t))), \quad \tilde{Y}(t) = (Y_0(t), \ldots, Y_{k-1}(t))^*,$$

$$\tilde{\xi}(t) = (\xi_0(t), \ldots, \xi_{k-1}(t))^*.$$

Таким образом, задача сводится к оценке k-мерного параметра x_0 в k-мерном же наблюдении

$$d\tilde{Y}(t) = \Phi(t)\, x_0\, dt + \sigma\, d\tilde{\xi}(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant \Delta. \tag{4.8}$$

Эта редукция позволяет распространить на задачу (4.7) понятие эффективности и асимптотической эффективности. В данном случае $S_0(t) = \sigma^2 J$, $B(t) = \sigma^{-2}\int\limits_0^t \Phi^*(s)\, \Phi(s)\, ds$. Из теоремы 3.1 находим, что при выполнении условия

$$\inf_x \frac{\int\limits_0^T |\Phi(s)\, x|^2\, ds}{|x|^2} \to \infty \quad \text{при} \quad T \to \infty \tag{4.9}$$

процедура (3.1) дает асимптотически эффективную гауссовскую оценку параметра x_0.

Конечно, изложенные соображения применимы и в том случае, когда функция $f(t)$ нелинейно зависит от k-мерного параметра x_0.

§ 5. Одна модификация

Процедура оценивания (3.1) обладает одним существенным недостатком, связанным со сложностью вычисления матрицы $(J + B(t, X(t)))^{-1}$, быстро возрастающей с ростом размерности. Поэтому мы обсудим сейчас другую процедуру, позволяющую обойти указанную трудность.

В соответствии с § 3

$$B(t, X(t)) = \int\limits_0^t \frac{\partial m^*}{\partial x}(s, X(t))\, S_0^{-1}(s)\, \frac{\partial m}{\partial x}(s, X(t))\, ds.$$

Если оценка $X(t)$ состоятельна, $X(t) \to x_0$, то естественно ожидать, что эту матрицу при больших t можно с относительно небольшой погрешностью заменить матрицей

$$Z(t) = \int_0^t \frac{\partial m^*}{\partial x}(s, X(t))\, S_0^{-1}(s)\, \frac{\partial m}{\partial x}(s, X(s))\, ds. \quad (5.1)$$

Таким образом, мы приходим к процедуре

$$dX(t) = \\ = (J + Z(t))^{-1} \frac{\partial m^*}{\partial x}(t, X(t))\, S_0^{-1}(t)\, (dY(t) - m(t, X(t))\, dt), \quad (5.2)$$

где $Z(t)$ находится из (5.1).

Эта процедура не является рекуррентной в смысле определения § 2, так как вычисление $Z(t)$ требует запоминания прошлых значений оценки $X(s)$, $0 \leqslant s \leqslant t$.

Однако процедуре (5.1), (5.2) легко придать рекуррентную форму, которая к тому же позволяет избежать обращения матриц (за исключением матрицы $S_0(t)$, обращение которой может быть выполнено заранее).

Обозначим

$$U(t) = (J + Z(t))^{-1}.$$

Тогда, учитывая (5.1), получим

$$\frac{dU}{dt} = -U(t) \frac{dZ}{dt} U(t) = \\ = -U(t) \frac{\partial m^*}{\partial x}(t, X(t))\, S_0^{-1}(t)\, \frac{\partial m}{\partial x}(t, X(t))\, U(t), \quad (5.3)$$

$$dX(t) = \\ = U(t) \frac{\partial m^*}{\partial x}(t, X(t))\, S_0^{-1}(t)\, (dY(t) - m(t, X(t))\, dt). \quad (5.4)$$

Как видно из (5.3), (5.4), процесс $(X(t), U(t))$ является марковским. Определяемая этими формулами процедура оценивания часто практически более удобна, чем процедура (3.1). В то же время, по-видимому, в тех случаях, когда она дает состоятельную оценку, эта оценка часто будет и асимптотически эффективной. Было бы интересно получить точные результаты в этом направлении.

ГЛАВА 10

РЕКУРРЕНТНОЕ ОЦЕНИВАНИЕ ПРИ НАЛИЧИИ УПРАВЛЯЮЩЕГО ПАРАМЕТРА

Рассматривается задача оценивания неизвестного параметра x плотности при наличии дополнительно управляющего параметра z, который может выбирать статистик. В принципе такая задача может быть сведена к задаче оптимального управления процессом, наблюдаемым с ошибкой, если априорное распределение неизвестного параметра задано. Однако задача нахождения в точности оптимального управления оказывается в этом случае очень громоздкой. Поэтому предлагается другой подход, основанный на рекуррентном оценивании одновременно параметра x и того значения z, при котором наиболее выгодно производить наблюдения. Ниже приведены условия, при которых риск $\tilde{d}_n$ построенного рекуррентного плана оценивания при квадратичном критерии качества эквивалентен при больших n риску d_n оптимального плана, в том смысле, что $\tilde{d}_n/d_n \to 1$ при $n \to \infty$.

§ 1. Постановка задачи

Пусть $f(y/x, z)$ — плотность распределения относительно меры $\nu(dy)$ на прямой, зависящая от параметров x и z. Предположим для простоты, что x, y, z одномерны, $x \in \mathscr{X} \subset E_1$, $y \in E_1$, $z \in \mathscr{Z} \in E_1$. Параметр $x = x_0$ неизвестен и должен быть оценен посредством наблюдений с плотностью f. Параметр z имеет смысл управления. Он находится в распоряжении статистика, который может выбирать его постоянным (тогда дело сводится к рассмотренной в главе 8 задаче оценивания при независимых наблюдениях), а может в i-м наблюдении выбирать значение параметра в зависимости от результатов предыдущих наблюдений:

$$Z_i = Z_i(Y_1, \ldots, Y_{i-1}) = Z_i(Y^{(i-1)}). \qquad (1.1)$$

Точнее, (1.1) следует понимать в том смысле, что совместное распределение $Y_1, \ldots, Y_n$ может быть вычислено по формуле

$$f_n(\mathscr{Y}^{(n)}, x_0) = \prod_{i=1}^{n} f(y_i/x_0, z_i(\mathscr{Y}^{(i-1)})). \qquad (1.2)$$

Будем обозначать $Z^i = (Z_1, \ldots, Z_i)$ и называть *допустимым управлением*, *планом эксперимента* или просто *планом* последовательность $Z_1, Z_2, \ldots$, удовлетворяющую условию (1.1) и такую, что $Z_i \in \mathfrak{Z}$, $i = 1, 2, \ldots$ Задача состоит в выборе управления (плана), обеспечивающего наилучшее качество оценивания в смысле того или иного критерия качества.

Мы, как и всюду в этой книге, ограничимся квадратичным критерием качества, т. е. будем искать Z_i, x_n, обеспечивающие минимальность $\mathsf{M}(x_n - x_0)^2$.

Сформулированная задача часто допускает точное решение, если оцениваемый параметр представляет собой случайную величину с заданным распределением вероятностей. Решение этой (и более общей) задачи содержится в теории статистических решений и излагается в большом числе руководств (см., например, Блекуэлл и Гиршик [1], Фельдбаум [1], и др.). Однако не всегда это решение удовлетворяет запросам практики.

Как уже отмечено, это решение возможно лишь при наличии «априорного» распределения параметра. Эта «априорная» трудность весьма существенна при небольшом числе наблюдений n, но для интересующей нас здесь проблемы построения асимптотически оптимальных оценок при $n \to \infty$ ею можно пренебречь. Дело в том, что при довольно общих предположениях (см., например, Ибрагимов и Хасьминский [1]) байесовская оценка с любой априорной плотностью $\pi(x)$, не обращающейся в нуль при $x \in \mathscr{X}$, асимптотически оптимальна и в том случае, когда x_0 — не случайная величина.

Существенней другая трудность, связанная с большим объемом вычислений в точности оптимального с точки зрения байесовского подхода решения (см., например, Фельдбаум [1], гл. VI). Вычисление, например, n-го оптимального управляющего воздействия $\tilde{z}_n$ как функции от Z^{n-1}, $Y^{(n-1)}$, состоит из следующих этапов.

1) Вычисление условного математического ожидания $x_n = \mathsf{M}(x_0/Z^{(n)}, Y^{(n)})$ по формуле Байеса.

2) Вычисление условного момента $\mathsf{M}((x_n - x_0)^2/Z^{(n)}, Y^{(n-1)})$ как функции $2n-1$ переменной $Z_1, \ldots, Z_n$, $Y_1, \ldots, Y_{n-1}$.

3) Нахождение $\tilde{z}_n(Z^{(n-1)}, Y^{(n-1)})$ как решения уравнения динамического программирования

$$\inf_{z_n \in \mathcal{Z}} \mathsf{M}((x_n - x_0)^2/Z^{(n-1)}, z_n, Y^{(n-1)}) = \mathsf{M}((x_n - x_0)^2/Z^{(n-1)}, \tilde{z}_n, Y^{(n-1)}).$$

Для нахождения же первого управляющего воздействия $\tilde{z}_1$ необходимо сначала вычислить последовательность $\tilde{z}_n(Z^{(n-1)}, Y^{(n-1)}), \ldots, \tilde{z}_2(z_1, Y_1)$.

Эта трудность делает естественной задачу построения плана, в том или ином смысле близкого к оптимальному при больших n и не требующего больших вычислений. Для того чтобы придать точный смысл словам «близкий к оптимальному», воспользуемся результатами § 8.6.

Предположим, что при всех $x \in \mathcal{X}$, $z \in \mathcal{Z}$ существует информационное количество

$$I(x, z) = \int \frac{\left(\dfrac{\partial f(y/x, z)}{\partial x}\right)^2}{f(y/x, z)} \nu(dy)$$

плотности f. Предположим также, что выполнены другие условия теоремы 8.6.1. Неравенство (8.6.3) в данном случае (см. (1.2)) принимает вид

$$\mathsf{M}_x(x_n - x)^2 \geqslant \left(\mathsf{M}_x \sum_{i=1}^{n} I(x, Z_i(Y^{(i-1)}))\right)^{-1} \tag{1.3}$$

Предположим дополнительно, что

$$\tilde{I}(x) = \sup_{z \in \mathcal{Z}} I(x, z) < \infty, \qquad x \in \mathcal{X}.$$

Тогда из (1.3) получим для любого плана эксперимента, для которого выполнены условия теоремы 8.6.1, неравенство

$$\mathsf{M}_x (x_n - x)^2 \geqslant \frac{1}{n\widetilde{I}(x)}. \tag{1.4}$$

Последовательность $Z_1, Z_2, \ldots$ назовем *асимптотически оптимальным планом*, если она удовлетворяет условию (1.1) и для этой последовательности управлений существует последовательность оценок $x_n = x_n(Y^{(n)})$ такая, что

$$\sqrt{n}(x_n - x_0) \sim \mathfrak{N}\left(0, \frac{1}{\widetilde{I}(x_0)}\right) \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

В следующем параграфе при некоторых ограничениях будут построены асимптотически оптимальный рекуррентный план и асимптотически эффективная рекуррентная оценка параметра x.

§ 2. Асимптотически оптимальный рекуррентный план

Не стремясь к максимальной общности, сформулируем сначала одну теорему, позволяющую получить асимптотически оптимальный в классе линейных функций наблюдений рекуррентный план. Мы предположим в соответствии с § 1, что $x \in E_1$, $z \in E_1$, предоставляя читателю самостоятельно установить сходимость и свойства рассмотренной ниже процедуры для многомерного случая.

Будем обозначать $Y(x, z)$ любую случайную величину, для которой

$$\mathsf{P}\{Y(x, z) < u\} = \int_{-\infty}^{u} f(y/x, z)\,\nu(dy).$$

Теорема 2.1. *Пусть выполнены условия:*

1. *Существует конечное математическое ожидание $m_1(x, z) = \mathsf{M}Y(x, z)$, производная $\partial m_1(x, z)/\partial x$ непрерывна по совокупности переменных и для некоторых постоянных $c_1 > 0$, $c_2 > 0$ выполнено неравенство*

$$c_1 < \left| \frac{\partial m_1(x, z)}{\partial x} \right| < c_2.$$

2. *Дисперсия $m_2(x, z) = \mathsf{D}Y(x, z)$ непрерывна и ограничена при $x \in E_1$, $z \in E_1$.*

3. *Функция $I(x, z)$ непрерывна, положительна и имеет при каждом x единственный максимум $\bar{I}(x)$ по z, причем $\bar{I}(x) = I(x, \tilde{z}(x))$, а функция $\tilde{z}(x)$ непрерывна.*

4. *Для некоторых $\alpha > 0$, $\varepsilon > 0$*

$$\sup_{|x-x_0|<\varepsilon} \mathsf{M} \, | Y(x, \tilde{z}(x)) |^{2+\alpha} < \infty.$$

Тогда рекуррентная процедура

$$X_{n+1} - X_n = \frac{1}{n+1} \left(\frac{\partial m_1}{\partial x} (X_n, Z_{n+1}) \right)^{-1} (Y_{n+1} - m_1(X_n, Z_{n+1})), \qquad Z_{n+1} = \tilde{z}(X_n) \tag{2.1}$$

дает состоятельную в сильном смысле оценку параметра x_0, причем эта оценка асимптотически нормальна, а ее асимптотическая эффективность равна

$$\left(\frac{\partial m_1}{\partial x} (x_0, \tilde{z}(x_0)) \right)^2 \Big/ m_2(x_0, \tilde{z}(x_0)) \, \bar{I}(x_0).$$

В частности, для случая, когда

$$Y(x, z) = m_1(x, z) + \sqrt{m_2(z)}\, \xi \tag{2.2}$$

(ξ — гауссовская случайная величина с параметрами (0,1)), процедура (2.1) асимптотически эффективна, а соответствующий ей план $Z_{n+1} = \tilde{z}(X_n)$, $n = 1, 2, \ldots$, асимптотически оптимален.

Задача 2.1. Докажите эту теорему.

Указание. Воспользоваться методом исследования свойств процедуры (3.7) в § 8.3.

Процедура (2.1) позволяет получить асимптотически оптимальный план лишь при гауссовских шумах вида (2.2). Следующая процедура позволяет добиться аналогичного результата в значительно более широком классе случаев. А именно, предположим, что выполнено условие 3 теоремы 2.1 и рассмотрим процедуру

$$X_{n+1} - X_n = \frac{I^{-1}(X_n, Z_{n+1})}{n+1} \frac{f'_x(Y_{n+1}/Z_{n+1}, X_n)}{f(Y_{n+1}/Z_{n+1}, X_n)}, \qquad Z_{n+1} = \tilde{z}(X_n). \tag{2.3}$$

Задача 2.2. Проверьте, что для наблюдений (2.2) процедуры (2.3) и (2.1) совпадают.

Как и в § 8.4, легко убедиться, что функция

$$M(x, z) = \int \ln \frac{f(y/x, z)}{f(y/x_0, z)} f(y/x_0, z)\, \nu(dy) \tag{2.4}$$

при любом z достигает максимального значения при $x = x_0$. Будут сделаны следующие предположения (ср. с теоремой 8.4.1):

I. Функции $f(y/x, z)$, $M(x, z)$ дважды дифференцируемы по x, причем равенства (2.4) и

$$\int f(y/x, z)\, \nu(dy) = 1 \tag{2.5}$$

можно дважды дифференцировать под знаком интеграла по x.

II. При всех $\varepsilon > 0$

$$\sup_{\varepsilon < |x - x_0| < \varepsilon^{-1},\; z \in E_1} m(x, z)(x - x_0) < 0,$$

где $m(x, z) = \frac{\partial}{\partial x} M(x, z)$, причем функция $\frac{\partial m}{\partial x}(x, z)$ непрерывна.

III. Выполнено условие 3 теоремы 2.1.

IV. Функция

$$G(x) = I^{-2}(x, \tilde{z}(x)) \int \left[\frac{f'_x(y/x, z)}{f(y/x, z)} \bigg|_{z = \tilde{z}(x)} \right]^2 f(y/x_0, \tilde{z}(x))\, \nu(dy)$$

непрерывна и растет не быстрее квадратичной при $|x| \to \infty$.

V. Сходится равномерно в некоторой окрестности точки x_0 интеграл в правой части последнего равенства; точнее, для некоторого $\varepsilon > 0$

$$\sup_{|x - x_0| < \varepsilon} \int\limits_{\left| \frac{f'_x(y/x, z)}{f(y/x, z)} \right|_{z = \tilde{z}(x)} > R} \left[\frac{f'_x(y/x, z)}{f(y/x, z)} \bigg|_{z = \tilde{z}(x)} \right]^2 \times$$

$$\times f(y/x_0, \tilde{z}(x))\, \nu(dy) \xrightarrow[R \to \infty]{} 0.$$

Теорема 2.2. *В условиях* I — V *процедура* (2.3) *дает состоятельную в сильном смысле асимптотически эффективную оценку параметра* x_0 *и асимптотически оптимальный план эксперимента.*

Доказательство. Обозначим

$$\Phi(Y_{n+1}, x) = \frac{1}{I(x, \widetilde{z}(x))} \frac{f'_x(Y_{n+1}/x, \widetilde{z}(x))}{f(Y_{n+1}/x, \widetilde{z}(x))}.$$

Тогда

$$\mathsf{M}\Phi(Y_{n+1}, x) = \frac{m(x, \widetilde{z}(x))}{I(x, \widetilde{z}(x))}, \qquad \mathsf{M}\Phi^2(Y_{n+1}, x) = G(x).$$

Отсюда и из условий II, III, IV вытекает согласно теореме 4.1.1 состоятельность оценки X_n. Теперь осталось проверить выполнение условий теоремы 6.6.2 и вычислить дисперсию предельного нормального закона. Если выяснится, что она асимптотически совпадает с нижней границей (1.4), то теорема будет доказана.

Из условия I теоремы вытекает справедливость при всех z равенства $m(x_0, z) = 0$. Далее, точно так же, как и при доказательстве теоремы 8.4.1, можно убедиться, что $m'_x(x_0, z) = -I(x_0, z)$ при всех z.

Поэтому

$$\left(\frac{m(x, \widetilde{z}(x))}{I(x, \widetilde{z}(x))}\right)'_x\Bigg|_{x=x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{m(x, \widetilde{z}(x)) - m(x_0, \widetilde{z}(x))}{I(x, \widetilde{z}(x))(x - x_0)} =$$

$$= \frac{\dfrac{\partial m}{\partial x}(x_0, \widetilde{z}(x_0))}{I(x_0, \widetilde{z}(x_0))} = -1.$$

Кроме того, в силу условия IV

$$\mathsf{M}\Phi^2(Y_{n+1}, x) = G(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} G(x_0) = I^{-1}(x_0, \widetilde{z}(x_0)) = \widetilde{I}^{-1}(x_0).$$

Из этих выкладок и условия V вытекает применимость теоремы 6.6.2 и соотношение

$$\sqrt{n}(X_n - x_0) \sim \mathfrak{N}\left(0, \frac{1}{\widetilde{I}(x_0)}\right).$$

Теорема доказана.

Замечание 1. В этом параграфе мы лишь для конкретности предполагали $x \in \mathscr{X} = E_1$, $z \in \mathfrak{Z} = E_1$. Аналогичные результаты можно получить и в случае, когда $\mathscr{X}$ и $\mathfrak{Z}$ — открытые множества из E_1. В этом случае следует строить модифицированную процедуру РМ (см. § 7.1), с тем чтобы оценка X_n не выходила из множества $\mathscr{X}$. Можно предположить также, что $\mathfrak{Z}$ — замкнутое множество. Тогда важное условие III не является сколько-нибудь ограничительным. Не существенно также требование единственности точки максимума функции $I(x, z)$ по z. Однако нарушение условия II может привести к несостоятельности процедуры (2.3).

Замечание 2. Можно показать, что при соответствующих ограничениях процедуры (2.1) и (2.3) дают асимптотически эффективные оценки и в многомерном случае: $x \in \mathscr{X} \subset E_1$, $z \in \mathfrak{Z} \subset E_k$. Конечно, в этом случае I — матрица, $f'_x = \operatorname{grad}_x f(y/z, x)$ — вектор. Отметим также, что некоторые из условий теоремы 2.2 можно ослабить, если воспользоваться вместо (2.3) процедурой, аналогичной процедуре (8.4.6) в задаче оценивания.

§ 3. Два примера

1. Пусть известна функция двух переменных $g(x, z)$, $x \in E_1$, $z \in E_1$. Статистик в каждый момент времени может произвести «измерение» этой функции в любой точке z при некотором неизвестном ему значении $x = x_0$. При этом результат измерения в точке $x = x_0$ в момент i — случайная величина

$$Y_i = g(x_0, z) + \sigma(z)\,\xi_i.$$

Пусть для простоты ξ_i — независимые гауссовские случайные величины с параметрами (0, 1).

Задача состоит в том, чтобы по возможности оптимально оценить x_0, выбирая наиболее подходящее для этой оценки значение z.

Поскольку никаких априорных сведений о параметре x_0 не предполагается, то естественно одновременно улучшать оценку и оптимизировать наблюдения, выбирая «лучшую» точку z.

Изложенную задачу можно мыслить как одну из задач теории дуального управления Фельдбаума [1]. Ее легко интерпретировать и в терминах теории информации.

Предположим, что функция

$$\Psi(x, z) = \sigma^{-2}(z) \left(\frac{\partial g(x, z)}{\partial x}\right)^2$$

ограничена снизу и сверху положительными постоянными, а

$$\sup_{z \in E_1} \Psi(x, z) = \Psi(x, \bar{z}(x)).$$

В соответствии с результатами § 2 (теорема 2.1) асимптотически эффективная оценка параметра x_0 может быть получена посредством процедуры

$$X_{n+1}-X_n=\frac{1}{n+1}\,\frac{(Y_{n+1}-g\,(X_n,\,Z_{n+1}))}{\frac{\partial g}{\partial x}\,(X_n,\,Z_{n+1})},\qquad Z_{n+1}=\widetilde{z}\,(X_n). \tag{3.1}$$

При этом

$$\sqrt{n}\,(X_n-x_0)\sim\mathfrak{N}\left(0,\,\frac{\sigma^2\,(\widetilde{z}\,(x_0))}{\left(\frac{\partial g}{\partial x}\,(x_0,\,\widetilde{z}\,(x_0))\right)^2}\right).$$

Таким образом, выгодней всего производить измерения при том значении параметра, при котором максимально $\sigma^{-2}\,(z)\,\left|\,\frac{\partial g}{\partial x}\,(x_0,\,z)\,\right|^2$. Если g — линейная по x функция, $g\,(x,\,z)=xg\,(z)$, то этот вывод хорошо известен в теории информации: передавать следует при том значении z, при котором максимально отношение сигнал/шум.

Если, в частности, $g\,(x,\,z)=g\,(x-z)$, $\sigma\,(z)=\text{const}$, то $\widetilde{z}\,(x)=-\widetilde{x}+x$, где $\widetilde{x}$ — точка, в которой имеет максимум функции $g'\,(x)$. Процедура (3.1) принимает особенно простой вид

$$X_{n+1}-X_n=\frac{1}{n+1}\,\frac{Y_{n+1}-g\,(\widetilde{x})}{\frac{\partial g}{\partial x}\,(\widetilde{x})}.$$

2. Рассмотрим задачу, сформулированную А. А. Фельдбаумом в [1], стр. 434. Для этого в предыдущем примере следует положить $g\,(x,\,z)=(x-z)^2$, $\sigma\,(z)=\sigma=\text{const}$. Кроме того, в данном случае параметр управления z стеснен ограничением

$$|\,z\,|\leqslant 1. \tag{3.2}$$

(Ограничение допустимых управлений необходимо, чтобы задача была содержательной, так как в противном случае можно, выбирая очень большие по модулю значения z, «подавить» шумы).

Требуется управлять параметрами $Z_1,\,\ldots,\,Z_n$ таким образом, чтобы минимизировать $\mathsf{M}\,(X_n-x_0)^2$. В книге Фельдбаума рассмотрен способ точного решения этой задачи, если задано априорное распределение параметра x_0

(предполагается также, что это распределение сосредоточено на интервале $(-1,1)$). Построенное решение основано на формуле Байеса (см. § 1) и с принципиальной стороны довольно просто. Однако построение оптимального плана требует громоздких вычислений и большой памяти машины. К тому же само предположение о наличии априорного распределения параметра может не выполняться.

Попробуем взглянуть на эту задачу с точки зрения подхода, развиваемого в этой главе, т. е. будем искать не оптимальный, а лишь асимптотически оптимальный план экспериментов.

В данном случае $Y_i = (x_0 - Z_i)^2 + \sigma\xi_i$. Поэтому (см. (8.1.13)) $I(x, z) = 4(x-z)^2\sigma^{-2}$.

Так как верхняя грань $I(x, z)$ по $z \in [-1, 1]$ достигается в одном из концов отрезка, то на основании (1.4) в данном случае имеем

$$\mathsf{M}_{x_0}(X_n - x_0)^2 \geqslant \frac{\sigma^2}{4n \max\{(x_0-1)^2, (x_0+1)^2\}}. \tag{3.3}$$

В соответствии с данными выше общими определениями асимптотически оптимальный план будет построен, если будут построены две последовательности: «управлений» Z_n и оценок X_n, такие, что для этих оценок X_n неравенство (3.3) переходит в асимптотическое равенство.

Далее, в данном случае функция $\partial g/\partial x = 2(x-z)$ меняет знак, так что доказанные теоремы не дают оснований утверждать сходимость процедуры (3.1). Нетрудно видеть, что эта процедура и на самом деле, вообще говоря, не дает даже состоятельной оценки x_0. Правда, в данном случае можно воспользоваться процедурой Кифера — Вольфовица, точнее, ее «урезанным» вариантом (см. (3.2)). Эта процедура позволит построить последовательность $Z_n \to x_0$ при $n \to \infty$, однако при любом выборе параметров процедуры эта оценка не может быть асимптотически эффективной. В самом деле, из соотношения $Z_n \to x_0$ и (3.2) вытекает равенство

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \mathsf{M}_{x_0} I(x_0, Z_i)}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{4}{\sigma^2} \mathsf{M}_{x_0} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (Z_i - x_0)^2 = 0.$$

Отсюда и из (8.6.3) следует, что

$$n\mathsf{M}_{x_0}(Z_n - x_0)^2 \to \infty \quad \text{при} \quad n \to \infty,$$

т. е. оценка Z_n имеет асимптотическую эффективность нуль [1]. (Эта ситуация представляется нам типичной — процедура КВ часто удобна в практических задачах, однако ее асимптотическая эффективность в задачах оценивания равна нулю. Для некоторых способов выбора параметров процедуры КВ этот вывод следует из теорем об асимптотической нормальности процедуры КВ см. работы Сакса [1], Фабиана [5]).

Таким образом, рассмотренные ранее процедуры не дают асимптотически эффективных оценок. Однако существует другой, совсем простой способ построения такой оценки, к изложению которого мы и переходим.

Рассмотрим план эксперимента, при котором статистик тратит бесконечно большую, но малую по сравнению с n долю времени на «разведку»,— выяснение того, отрицательно или положительно x_0. После этого, приняв решение о знаке x_0, статистик выбирает в качестве z_i в течение всего остального времени -1, если он принял решение $x_0 > 0$, и $+1$ в противоположном случае.

Итак, все время n эксперимента разобьем на три части $I_1 = \{0 < i \leqslant \sqrt{n}\}$, $I_2 = \{\sqrt{n} < i \leqslant 2\sqrt{n}\}$, $I_3 = \{2\sqrt{n} < i \leqslant n\}$ и положим

$$Z_i = 1 \text{ для } i \in I_1, \quad Z_i = -1 \text{ для } i \in I_2.$$

Вычислим теперь

$$\eta_1 = \frac{1}{[\sqrt{n}]} \sum_{i=1}^{[\sqrt{n}]} Y_i, \quad \eta_2 = \frac{1}{[\sqrt{n}]} \sum_{i=[\sqrt{n}]+1}^{[2\sqrt{n}]} Y_i.$$

(Заметим, что это вычисление не требует запоминания чисел Y_i. Хорошо известно, что среднее арифметическое можно вычислять по рекуррентным формулам.) Далее полагаем

$$Z_i = 1 \text{ для } i \in I_3, \text{ если } \eta_1 > \eta_2,$$
$$Z_i = -1 \text{ для } i \in I_3, \text{ если } \eta_1 \leqslant \eta_2.$$

---

[1]) Точнее этот вывод справедлив лишь в том случае, когда оценка Z_n — несмещенная, однако можно установить аналог неравенства (8.6.1) для смещенных оценок и убедиться, что высказанное утверждение все же справедливо.

После этого строим оценку X_n параметра x_0 так:

$$X_n = \begin{cases} 1 - \sqrt{\eta}, & \text{если} \quad \eta_1 > \eta_2, \\ \sqrt{\eta} - 1, & \text{если} \quad \eta_2 \geqslant \eta_1, \end{cases} \tag{3.4}$$

где η — среднее арифметическое наблюдений, для которых $i \in I_3$ (Конечно, несколько более точный результат можно получить, используя также и наблюдения с номерами из I_1, если $\eta_1 > \eta_2$, и из I_2, если $\eta_1 \leqslant \eta_2$. Однако на интересующий нас асимптотический вывод это не повлияет.)

Задача 3.1. Докажите, что оценка (3.4) асимптотически эффективна, т. е. при любом $x_0 \in E_1$

$$n \mathsf{M}_{x_0} (X_n - x_0)^2 \xrightarrow[n \to \infty]{} \frac{\sigma^2}{4 \max [(x_0 - 1)^2, (x_0 + 1)^2]}.$$

Указание. Рассмотрите отдельно три случая: $|x_0| \leqslant n^{-1/8}$, $x_0 < -n^{-1/8}$, $x_0 > n^{-1/8}$.

§ 4. Случай непрерывного времени

Все изложенные в этой главе результаты допускают обобщение на случай непрерывных по времени наблюдений, если наблюдения имеют стохастический дифференциал в смысле Ито. В этом параграфе мы изложим соответствующую постановку задачи и приведем аналог теоремы 2.1.

В соответствии с обсуждением в § 8.1 предположим, что при $z \in \mathfrak{Z} \subset E_1$, $x \in \mathscr{X} \subset E_1$ определены две непрерывные функции $m(x, z)$ и $\sigma(z)$.

Пусть, далее, процесс наблюдения $Y(t)$ имеет стохастический дифференциал, причем

$$dY(t) = m(x_0, Z(t))\, dt + \sigma(Z(t))\, d\xi(t). \tag{4.1}$$

Здесь x_0 — оцениваемое значение параметра, $Z(t)$ — процесс управления (план эксперимента), принимающий значения из $\mathfrak{Z}$. При этом, как обычно, будет предполагаться, что в множество допустимых управлений входят лишь такие функции $Z(t)$, для которых стохастический дифференциал (4.1) определен. В частности, предполагается, что процесс $Z(t)$ $\mathscr{N}_t$-измерим (ср. с (1.1)), где $\mathscr{N}_t$ — σ-алгебра событий, порожденных течением процесса $Y(s)$, $s \leqslant t$.

Неравенство (9.1.5) в данном случае имеет вид

$$\mathsf{M}\,(X(t)-x_0)^2 \geqslant \left(\mathsf{M}\int_0^t \left(\frac{m'_x(Z(s),\,x_0)}{\sigma(Z(s))}\right)^2 ds\right)^{-1}. \tag{4.2}$$

Если функция $\Psi(z,\ x)=\left(\frac{m'_x(z,\ x)}{\sigma(z)}\right)^2$ достигает своего максимального по $z \in \mathcal{Z}$ значения в некоторой точке $\tilde{z}(x) \in \mathcal{Z}$, так что

$$\sup_{z\in\mathcal{Z}} \Psi(z,\ x)=\Psi(\tilde{z}(x),\ x)=\tilde{\Psi}(x), \tag{4.3}$$

то из (4.2) при любом допустимом управлении $Z(t)$ и для любой несмещенной оценки $X(t)$ параметра x_0, для которой справедливо неравенство (9.1.5), приходим к неравенству

$$\mathsf{M}\,(X(t)-x_0)^2 \geqslant \frac{\sigma^2(\tilde{z}(x_0))}{t\,(m'_x(\tilde{z}(x_0),\ x_0))^2}. \tag{4.4}$$

В соответствии с § 1 допустимое управление $Z(t)$ назовем *асимптотически оптимальным*, если при этом управлении существует оценка $X(t)$ параметра x_0 такая, что

$$\sqrt{t}\,(X(t)-x_0) \sim \mathfrak{N}\left(0,\ \frac{\sigma^2(\tilde{z}(x_0))}{(m'_x(\tilde{z}(x_0),\ x_0))^2}\right).$$

Следующая теорема дает простые условия, когда асимптотически оптимальное управление существует. Одновременно строится соответствующая ему асимптотически эффективная оценка.

Теорема 4.1. *Пусть функции $m(x,\ z)$, $m'_x(x,\ z)$ и $\sigma(z)$ непрерывны при $x \in \mathcal{X}=E_1$, $z \in \mathcal{Z}=E_1$, производная $\partial m/\partial x$ удовлетворяет при всех $x \in E_1$, $z \in E_1$ условию*

$$0<c_1<\left|\frac{\partial m}{\partial x}\right|<c_2$$

(c_1, c_2 — постоянные) и выполнено условие (4.3), где $\tilde{z}(x)$ — однозначная непрерывная функция $x \in E_1$.

Тогда формулы

$$dX(t)=\frac{1}{t+1}\left\{\frac{\partial m}{\partial x}(X(t),\ Z(t))\right\}^{-1}\times$$
$$\times\,(dY(t)-m(X(t),\ Z(t))\,dt), \tag{4.5}$$
$$Z(t)=\tilde{z}(X(t))$$

определяют асимптотически оптимальное управление $Z(t)$ *для процесса наблюдения* (4.1) *и асимптотически эффективную оценку* $X(t)$ *параметра* x_0.

Доказательство. Формулы (4.5) с учетом (4.1) можно переписать в виде

$$dX(t) = \frac{1}{t+1}\left\{\frac{\partial m}{\partial x}(X(t), \tilde{z}(X(t)))\right\}^{-1}\{[m(x_0, \tilde{z}(X(t))) - \\ - m(X(t), \tilde{z}(X(t)))]\,dt + \sigma(\tilde{z}(X(t)))\,d\xi(t)\}. \quad (4.6)$$

Применим теперь к (4.6) теоремы глав IV и VI. Из теоремы 4.4.2 вытекает состоятельность оценки $X(t)$ в сильном смысле. Поэтому уравнению (4.6) можно также придать форму

$$dX(t) = \frac{1}{t+1}[(x_0 - X(t) + \delta(X(t)))\,dt + \sigma_1(X(t))\,d\xi(t)],$$

причем при $x \to x_0$

$$\frac{\delta(x)}{|x-x_0|} \to 0, \qquad \sigma_1(x) \to \frac{\sigma(\tilde{z}(x_0))}{m'_x(x_0, \tilde{z}(x_0))}.$$

Из этих соотношений и теоремы 6.5.1 вытекают утверждения теоремы.

ПРИМЕЧАНИЯ

Глава 1

Доказательство всех теорем §§ 1—4 можно найти в книгах Колмогорова [1], Халмоша [1], Колмогорова и Фомина [1]. Понятие мартингала и супермартингала было введено Дубом. Теоремы 5.1 и 5.1′ и приведенные здесь доказательства также принадлежат Дубу [1].

Глава 2

§ 1. Более подробно свойства марковских процессов и их переходных функций изложены в книгах Феллера [1], Дынкина [1], Лоэва [1] и др.

§ 2. Теорема 2.1 по существу представляет собой частный случай теоремы Дуба [1] об остановке супермартингала. Неравенство Колмогорова для супермартингалов также можно найти в этой книге.

§ 3. Теоремы 3.1 и 3.2 общеизвестны. См., например, Гихман и Скороход [1].

§ 5. Близкие результаты см., например, в книге АБР [1] гл. IV.

§ 6. Теоремы 6.1 и 6.2 доказал Колмогоров [1] в более общей ситуации.

§ 7. Теорема 7.1 идейно близка к теореме 8 гл. 4 книги АБР [1].

§ 8. Подробное рассмотрение вопросов, связанных с описанной в этом параграфе постановкой задачи, см. в книге АБР [1], гл. 5.

Глава 3

§ 1. Более подробно определение и свойства марковского процесса с непрерывным временем см. в книге Дынкина [1].

§ 2. Предельный переход от уравнения (2.1) к марковскому процессу с непрерывным временем рассматривал Бернштейн [1], который, в частности, доказал теоремы о предельном поведении переходной вероятности при $h \to 0$.

§ 3—4. Стохастический интеграл в приводимой здесь форме ввел Ито. Доказательство теоремы 4.1 см., например, в книге Гихмана и Скорохода [2].

§ 7. Доказательство теоремы 7.1 можно найти в книге Хасьминского [1].

§ 8. Аналогичные результаты приведены в статье авторов [1].

Глава 4

§ 1. Как упоминалось в тексте, процедура с. а. для нахождения корня уравнения регрессии была предложена в работе Роббинса и Монро 1951 г. [1]. При некоторых условиях в этой работе доказана сходимость процедуры (1.5) в среднем квадратическом. Этот результат обобщался в работах Вольфовица [1], Блума [1], Чжуна [1] и других. Блум [1], в частности, первым доказал сходимость процедуры с вероятностью 1. Теорема 1.1 и приведенный в тексте метод ее доказательства принадлежат Гладышеву [1]. Многомерная процедура РМ была введена Блумом [2]. Блум первым применил теорию супермартингалов к исследованию сходимости процедур с. а.

§ 2. Процедура (2.5) предложена Кифером и Вольфовицем [1] в 1952 г. В этой работе доказана ее сходимость в среднем квадратическом. В работах Блума [2], Дермана [1], Бюркхольдера [1] и др. эта процедура подробно изучалась, в частности, была доказана сходимость с вероятностью 1. Мы не останавливаемся здесь на более общих процедурах типа стохастической аппроксимации, предложенных в работах Бюркхольдера [1], Дворецкого [1] и др. Более подробные литературные указания читатель сможет найти в обзорных статьях Дворецкого [1], Фабиана [3], Сакрисона [3], Шметтерера [1], Логинова [1] и др.

§ 3. Непрерывный аналог процедуры РМ ввели Дримл и Недома [1]. Они доказали сходимость этой процедуры при довольно общих предположениях относительно случайных процессов, входящих в правую часть уравнения. Сакрисон [1] при некоторых предположениях доказал сходимость непрерывного аналога процедуры Кифера — Вольфовица. Рассмотренные здесь непрерывные процедуры были введены в работах Хасьминского [1], авторов [1].

§ 4. Первые теоремы о сходимости многомерной процедуры РМ доказал Блум [2]. См. также АБР [1], Шметтерер [1] и там дальнейшая библиография. Теорема 4.4 близка к упомянутому результату Гладышева [1], теорема 4.5 принадлежит Браверману и Розоноэру (см. АБР [1]). В связи с последней теоремой возникает вопрос о том, нельзя ли заменить условие $\sum a^2(t) < \infty$ более слабым и при доказательстве сходимости $X(t)$ к X_0 п. н. Оказывается, что такое ослабление действительно возможно. В ряде случаев можно, например, требовать лишь условия $\sum a^n(t) < \infty$ при некотором $n > 0$ (правда, при этом приходится накладывать более суровые ограничения на свойства «шумов») Приведенные здесь теоремы для непрерывной процедуры РМ доказаны авторами [1].

§ 5. Для дискретного времени теоремы о сходимости многомерных процедур КВ получены Блумом [2], Дупачем [1] и др. Для непрерывного времени см. работу авторов [1].

Глава 5

Гипотеза о том, что процедура КВ не может сходиться с положительной вероятностью к точкам минимума функции регрессии, была высказана Фабианом [1], [2]. Изложенные здесь результаты основаны на работах Хасьминского [1], Невельсона [1], [2]. В последних двух работах доказаны и более общие теоремы. См. также Красулина [1].

Глава 6

§ 1. Теорема 1.1 для одномерного случая доказана, например, в книге Лоэва [1], для многомерного случая см. Сакс [1].

§ 2. Для одномерного дискретного процесса РМ $X(t)$ условия, при которых выполнено соотношение $\mathsf{M}X^2(t) = O(1/t)$, $t \to \infty$, впервые получил Чжун [1]. Для многомерного дискретного процесса РМ результат, аналогичный лемме 2.1, получен Саксом [1] при дополнительном предположении $M\,|\,G(t, x, \omega)\,|^2 < c < \infty$. Тот факт, что из (2.8) следует (2.9), вытекает из известной леммы Чжуна [1].

§ 3—4. Лемма 3.1 установлена Хасьминским [2]. Лемма 4.3 принадлежит Саксу [1].

§ 5. Теорема 5.3 при $\mu > 0$ доказана в работе Хасьминского [2]. При некоторых предположениях асимптотическую нормальность процедуры РМ установил Холево [1].

§ 6. Теорема 6.1 доказана Саксом [1] при следующих дополнительных предположениях: а) матрица B может быть приведена к диагональному виду с помощью подобного преобразования ортогональной матрицей; б) норма матрицы $A(t, x)$ ограничена при $t \geqslant 1$, $x \in E_l$. Теорема 6.3 является новой. Теоремы об асимптотической нормальности для других процедур с. а. доказаны в работах Фабиана [5], Дермана [1], Бюркхольдера [1], Дупача [1] и других. Метод «усечения» для доказательства асимптотической нормальности процедуры с. а. первыми применили Ходжес и Леман [1].

§ 7. Теоремы о сходимости моментов процесса с. а. РМ впервые получил Чжун [1] для одномерного случая. Для многомерного случая результат теоремы 7.2 хорошо известен (см., например, Шметтерер [1]) для $\lambda > \frac{1}{2a}$. Если же условие (α) § 7 выполнено с $\lambda < 1/2a$, то единственный известный нам результат о сходимости моментов принадлежит Сакрисону [2]. Для построенной им модификации процедуры РМ Сакрисон доказал сходимость матрицы вторых моментов процесса $\sqrt{t}\,(X(t) - x_0)$ к соответствующей матрице ковариаций нормального закона, если все моменты $\mathsf{M}\,|\,G(t, x, \omega)\,|^p$, $p = 1, 2, \ldots$, ограничены.

Глава 7

§§ 1—4. Алберт и Гарднер [1] доказали сходимость и асимптотическую нормальность процедуры (1.1) и более общей (с множителями $a(t)$, зависящими от прошлых наблюдений). Алберт и Гарднер [1] рассмотрели и аналогичную (1.1) многомерную модификацию. Чиби [1], [2] недавно доказал сходимость усеченных процедур для широкого класса усечений.

§ 5. Вопросу об оптимальном выборе параметров процедуры РМ и ее адаптивным модификациям посвящено много работ. Укажем, например, работы Чжуна [1], Дворецкого [1], Кестена [1], Цыпкина [1], [2], Стратоновича [2] и др. Наше изложение опирается на работу Вентера [1], который доказал утверждение теоремы 5.1 в несколько более ограничительных условиях.

§ 6. Теорема 6.1 несколько обобщает результат Вентера [1]. теорема 6.2 — новая.

Глава 8

§ 1. Теорема 1.1 вытекает из результатов Чепмена и Роббинса [1], Кагана [1]. Теорема 1.2 доказана Ибрагимовым и Хасьминским [2]. В этих работах получены неравенства и для смещенных оценок.

§ 2. Теорема 2.1 и ее аналог для смещенных оценок доказаны в работе Ибрагимова и Хасьминского [2].

§ 3. Использованию процедуры РМ для параметрического оценивания посвящена книга Алберта и Гарднера [1], которые рассматривали более широкий класс оценок, не образующих, вообще говоря, марковских процессов.

§ 4—5. Теоремы 4.1 и 5.4 доказаны Сакрисоном [2], [3] при более ограничительных условиях (и без утверждения о сходимости распределений). Другие критерии оптимальности рассматривали Алберт и Гарднер [1], Цыпкин [1], Стратонович [2], однако предложенные ими процедуры, как правило, зависят и от прошлых наблюдений (см., например, процедуру (0.9) Введения).

Глава 9

§ 1. Неравенство (1.7) см., например, в книге Ван Триса [1].

§ 2. Для случая линейной зависимости m от параметра $m(x_0) = mx_0$, где m — невырожденная матрица, эквивалентную (2.4) процедуру рассматривал Холево [1]. Он рассматривал также случай, когда матрица m — не квадратная, но mm^* невырождена. Для нелинейного случая в этой работе предложена более сложная, чем (2.4), процедура. В этой же работе при некоторых предположениях установлена асимптотическая нормальность процедур оценивания.

§ 3. Рекуррентные оценки, близкие к (3.1), можно получить на основе байесовского подхода и линеаризации. Для линейных систем аналогичные процедуры оценивания имеются в работах Калмана и Бьюси [1], Липцера и Ширяева [1] и др.

§ 4. С других точек зрения задача оценки x_0 по наблюдениям (4.7) (оценка коэффициентов линейной регрессии) рассматривалась в большом числе работ.

§ 5. Процедура (5.3), (5.4) при соответствующих начальных условиях совпадает для линейной функции $m(t, x) = m(t)x$ с уравнениями Калмана — Бьюси оптимальной линейной фильтрации. Другими словами, этой системе удовлетворяет, в частности, условное математическое ожидание x_0 при условии $Y(s)$, $s \leqslant t$, если априорное распределение x_0 — гауссовское.

ЛИТЕРАТУРА

Айзерман М. А., Браверман Э. М., Розоноэр Л. И. (АБР)

1. Метод потенциальных функций в теории обучения машин. «Наука», М., 1970.

Алберт, Гарднер (Albert A., Gardner L.)

1. Stochastic Approximation and Nonlinear Regression. M. I. T.— Press, Cambridge, Massachusetts, 1967.

Бернштейн С. Н.

1. Principes de la theorie des équations differentielless stochastiques. Тр. Матем. ин-та АН СССР, 5 (1932), 95—124.

Блекуэлл, Гиршик (Blackwell D., Girshick M. A.)

1. Теория игр и статистических решений. ИЛ, М., 1958.

Блум (Blum J. R.)

1. Approximation methods which converge with probability one. Ann. Math. Statist., 25, 2 (1954), 382—386.
2. Multidimensional stochastic approximation. Ann. Math. Statist., 25, 4 (1954), 737—744.

Бюркхольдер (Burkholder D. L.)

1. On a class of stochastic approximation procedures. Ann. Math. Statist., 27, 4 (1956), 1044—1059.

Ван Трис (Van Trees H. L.)

1. Detection, estimation and modulation theory. J. Wiley and sons, N. Y., 1968.

Васан (Wasan M. T.)

1. Stochastic approximation. Cambridge University Press, 1969.

Вентер (Venter J. H.)

1. An extension of the Robbins-Monro procedure. Ann. Math. Statist., 38, 1 (1967), 181-190.

Возенкрафт, Джекобс (Wozencraft J., Jacobs I.)

1. Теоретические основы техники связи. «Мир», М., 1969.

Вольфовиц (Wolfowitz J.)

1. On the stochastic approximation method of Robbins and Monro. Ann. Math. Statist., 23, 3 (1952), 457-462.

Гихман И. И., Скороход А. В.

1. Введение в теорию случайных процессов. Физматгиз, М., 1965.
2. Стохастические дифференциальные уравнения. «Наукова Думка», Киев, 1968.

Гладышев Е. Г.

1. О стохастической аппроксимации. Теор. вероятн. и ее примен., 10, 2 (1965), 297—300.

Дворецкий (Dvoretzky A.)
1. On stochastic approximation. Proc. of the Third Berkeley Symposium, 1 (1956), 39—55.
Дерман (Derman C.)
1. An application of Chung's lemma to the Kiefer-Wolfowitz stochastic approximation procedure. Ann. Math. Statist., **27**, 2 (1956), 532—536.
Дримл М., Недома И. (Driml M., Nedoma J.)
1. Stochastic approximations for continuous random processes. Trans. of the second Prague conference on Information theory (1960), 145—158.
Дуб Дж (Doob J.)
1. Вероятностные процессы. ИЛ., М., 1956.
Дупач (Dupač V.)
1. O Kiefer-Wolfowitzvě approximačni metodě. Časopis Pěst. Mat., **82**, 1 (1957), 47—75.
2. A dynamic stochastic approximation method. Ann. Math. Statist., **36**, 6 (1965), 1695—1702.
Дынкин Е. Б.
1. Марковские процессы. Физматгиз, М., 1963.
Дьячков А. Г., Пинскер М. С.
1. Об оптимальном линейном методе передачи по гауссовскому стационарному каналу без памяти с полной обратной связью. Проблемы передачи информации, **7**, 2 (1971), 38—46
Зигангиров К. Ш.
1. Передача сообщений по двоичному гауссовскому каналу с обратной связью. Проблемы передачи информации, **3**, 2 (1967), 98—101.
Ибрагимов И. А., Хасьминский Р. З.
1. Асимптотическое поведение некоторых статистических оценок. Теор. вероятн. и ее примен., **17**, 3 (1972).
2. Информационные неравенства и суперэффективные оценки. ДАН СССР, **204**, 6 (1972).
Ито К. (Ito K.)
1. On a formula concerning stochastic differentials. Nagoja Math, Journ., **3**, 1 (1951), 55—65.
Об одной формуле, касающейся стохастических дифференциалов. Математика, **3**, 5 (1959), 131—141.
Ито и Нисио (Ito K. and Nisio M.)
1. On stationary solutions of stochastic differential equations. Journ. of Math. Kyoto Univ., **4**, 1 (1964), 1—79.
Каган А. М.
1. К теории информационного количества Фишера, ДАН СССР, **151**, 2 (1963), 277—278.
Кайлат, Шалквийк (Kailath T., Shalkwijk J. R. M.)
1. A coding scheme for additive noise channels with feedback, I. IEEE trans., IT-12, 2 (1966), 172—182.
Калман, Бьюси (Kalman R. E., Bucy R. S.)
1. New results in linear filtering and prediction theory J. Basic Eng. march (1961), 95—108.
Кестен (Kesten H.)
1. Accelerated stochastic approximation. Ann. Math. Statist., **29**, 1 (1958), 41—59.

Кифер, Вольфовиц (Kiefer E., Wolfowitz J.)
1. Stochastic estimation of the maximum of a regression function. Ann. Math. Statist., 23, 3 (1952), 462—466.
Колмогоров А. Н.
1. Основные понятия теории вероятностей. ОНТИ, 1936.
Колмогоров А. Н., Фомин С. В.
1. Элементы теории функций и функционального анализа, 2-е изд. «Наука», М., 1968.
Крамер (Kramer H.)
1. Математические методы статистики. ИЛ, М., 1948.
Красовский Н. Н.
1. Некоторые задачи теории устойчивости движения. Физматгиз, М., 1959.
Красулина Т. П.
1. Процесс Роббинса — Монро в случае нескольких корней. Теор. вероятн. и ее примен. 12, 2 (1967), 386—390.
Либкинд Л. М.
1. О вероятности больших уклонений для квадратичного функционала от стационарной гауссовской последовательности. Проблемы передачи информации, 5, 2 (1969), 72—78.
Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н.
1. Нелинейная фильтрация диффузионных марковских процессов. Труды МИ АН СССР, 104 (1968), 135—180.
2. Об абсолютной непрерывности мер, соответствующих процессам диффузионного типа, относительно винеровской. Изв. АН СССР, сер. матем. 33, 4 (1972).
Логинов Н. В.
1. Методы стохастической аппроксимации. Автоматика и телемеханика, 4 (1966) 185—204.
Лоэв М. (Loève M.)
1. Теория вероятностей. ИЛ, М., 1962.
Малкин И. Г.
1. Теория устойчивости движения, 2-е изд. «Наука», М., 1966.
Невельсон М. Б.
1. О некоторых свойствах непрерывных процедур стохастической аппроксимации. Теор. вероятн. и ее примен., 17, 2 (1972), 310—319.
2. О сходимости непрерывных и дискретных процедур Роббинса — Монро в случае нескольких корней уравнения регрессии. Проблемы передачи информации, 8, 3 (1972), 48—57.
Невельсон М. Б., Хасьминский Р. З.
1. Непрерывные процедуры стохастической аппроксимации. Проблемы передачи информации, 7, 2 (1971), 58—69.
2. О сходимости моментов процедуры Роббинса — Монро. Автоматика и телемеханика, в печати.
Пинскер М. С.
1. Вероятность ошибки при блоковой передаче по гауссовскому каналу без памяти с обратной связью. Проблемы передачи информации, 4, 4 (1968), 3—19.
Рао (Rao C. R.)
1. Линейные статистические методы и их применения. «Наука», М., 1969.

Р о б б и н с, М о н р о (Robbins H., Monro S.)
1. A stochastic approximation method. Ann. Math. Statist., 22, 1 (1951), 400—407.
С а к р и с о н (Sakrison D. T.)
1. A continuous Kiefer-Wolfowitz procedure for random processes. Ann. Math. Statist. 35, 2 (1964), 590—599.
2. Efficient recursive estimation, application to estimating the parameter of a covariance functions. International Journal of Engineering Science, 3, 4 (1965), 461—483.
3. Stochactic Approximation: A Recursive Method for Solving Regression Problem. Advances in Communication Systems Theory and applications. Edited by Balakrishnan. A. V., New-York, London, 2 (1966), 51—106.
С а к с (Sacks J.)
1. Asymptotic distributions of stochastic approximations. Ann. Math. Statist, 29, 2 (1958), 373—405.
С к о р о х о д А. В.
1. Исследования по теории случайных процессов. Изд. Киевского ун-та, Киев, 1961.
С т р а т о н о в и ч Р. Л.
1. Условные марковские процессы и их применение в теории оптимального управления. Изд. МГУ, 1966.
2. Существует ли теория синтеза оптимальных адаптивных, самообучающихся систем? Автоматика и телемеханика, 1 (1968), 96—107.
Ф а б и а н В. (Fabian V.)
1. Stochastic Approximation Method. Чехословацкий матем. журнал, 10 (85), 2 (1960), 123—159.
2. A new one-dimensional stochastic approximation method for finding a local minimum of a function. Trans. III Prague conference on information theory, statistical decision functions, random processes, Prague (1964), 85—105.
3. Prehled deterministickych a stochastickych approximacnich metod pro minimalizaci funkci. Kybernetika, 1, 6 (1965), 499—523.
4. On the choice of design in stochastic approximation methods. Ann. Math. Statist., 39, 2 (1968), 457—465.
5. On asymptotic normality in stochastic approximation. Ann. Math. Statist. 39, 4 (1968), 1327—1332.
Ф е л л е р В. (Feller W.)
1. Введение в теорию вероятностей и ее приложения, т. II. «Мир», М., 1967.
Ф е л ь д б а у м А. А.
1. Основы теории оптимальных автоматических систем. «Наука», М., 1966.
Ф и х т е н г о л ь ц Г. М.
1. Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. II, 4-е изд. Физматгиз, М., 1959.
Х а л м о ш (Halmos P.)
1. Теория меры, ИЛ, М., 1953.
Х а с ь м и н с к и й Р. З.
1. Устойчивость дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров. «Наука», М., 1969.

2. О поведении процессов стохастической аппроксимации для больших значений времени. Проблемы передачи информации, 8, 1 (1972).

Ходжес, Леман (Hodges J. L., Lehman E. L.)

1. Two approximations to the Robbins-Monro process. Proc. Third Berkeley Symp. Math. Statist. and Probability, 1 (1956), 96—104.

Холево А. С.

1. Оценки параметров сноса диффузионного процесса методом стохастической аппроксимации. В сб. «Исследования по теории самонастраивающихся систем», ВЦ АН СССР. М., 1967.

Цыпкин Я. З.

1. Адаптация и обучение в автоматических системах. Наука, М., 1968.
2. Основы теории обучающихся систем. Наука, М., 1970.

Чепмен, Роббинс (Chapman D. C., Robbins H.)

1. Minimum variance estimation without regularity assumptions. Ann. Math. Statist., 22, 4 (1951), 581—586.

Чжун (Chung K. L.)

1. On a stochastic approximation method. Ann. Math. Statist., 25, 3 (1954), 463—483.

Чиби (Csibi S.)

1. Simple and compound processes in iterative machine learning. Preprint, Lectures in international summer school in Trieest, 1971.
2. Learning optimal decision functions recursively. Preprint, Lecture on the International Symposium in Tsahkadzor, 1971.

Шалквийк (Shalkwijk J. M.)

1. Recent development in feedback communication. Proceedings of the IEEE 57, 7 (1969), 1242—1249.

Шеннон К. (Shannon C.)

1. Математическая теория связи. В сб. «Работы по теории информации и кибернетике», ИЛ, М., 1963, 243—332.

Шметтерер (Schmetterer L.)

1. Multidimensional Stochastic Approximation. Multivariance Analysis-II. Edited by Paruchuri R. Krishnaian. Academic Press, New York—London (1969), 443—460.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Основные обозначения

$\| B \| = \sqrt{\sum_{i, j} b_{ij}^2}$ — норма матрицы $B = ((b_{ij}))$, стр. 162

C_2 — класс функций $V(t, x)$, непрерывно дифференцируемых по t и дважды непрерывно дифференцируемых по x, стр. 76

C_2^0 — совокупность функций $V(x) \in C_2$, имеющих ограниченные частные производные второго порядка, стр. 122

$D_L^{(t, x)}$ — область определения производящего оператора L в точке (t, x), стр. 43

D_L — область определения производящего оператора L, стр. 43

E_l — l-мерное евклидово пространство, стр. 20

$\mathscr{F}_t$ — монотонное семейство σ-алгебр, стр. 48, 79

$I(x)$ — информационное количество Фишера 232, 237

J — единичная матрица, стр. 161

L — производящий оператор, стр. 43, 90

$\mathbf{L}_2[a, b]$ — совокупность измеримых случайных функций $f(t, \omega)$, $t \in [a, b]$, $\omega \in \Omega$, $\mathscr{F}_t$-измеримых при каждом t, для которых $\int_a^b f^2(t, \omega)\,dt < \infty$ с вероятностью 1, стр. 79.

$\mathscr{N}_t$ — σ-алгебра событий, порожденная случайными величинами $X(u)$, $u \leqslant t$, стр. 41, 98

τ_G — момент первого выхода из области G, стр. 44, 98

$\nabla_c f(x)$ — вектор с координатами $\dfrac{f(x + ce_i) - f(x - ce_i)}{2c}$, стр. 1

$\dfrac{\partial \varphi}{\partial x}$ — матрица с элементами $\dfrac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}$, стр. 143

$\Phi(B)$ — класс функций, введенный на стр. 54

$U_\varepsilon(B)$ — ε-окрестность множества B, стр. 53

$V_\varepsilon(B) = E_l \setminus U_\varepsilon(B)$, стр. 53

$U_{\varepsilon, R}(B) = V_\varepsilon(B) \cap \{x : |x| < R\}$, стр. 54

$\tilde{U}$ — замыкание множества U, стр. 209

$X(t) \sim \mathfrak{N}(m, S)$ — асимптотическая нормальность $X(t)$, стр. 160

$\mathscr{X}$ — область значений неизвестного параметра x, стр. 231

$\mathscr{Y}^{(n)} = (y_1, \ldots, y_n)$, стр. 257

$\mathscr{Z}$ — область значений управляющего параметра z, стр. 280